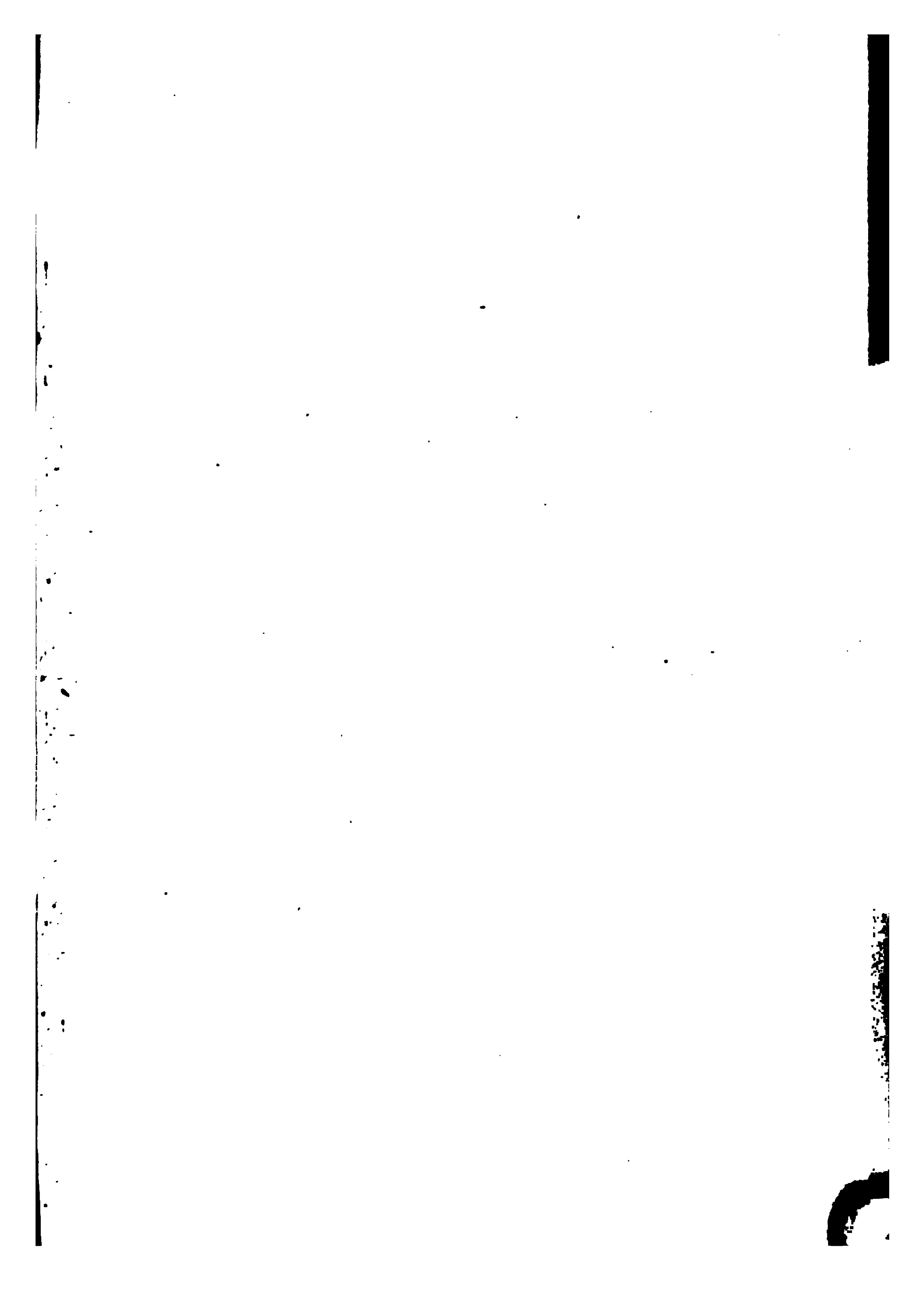
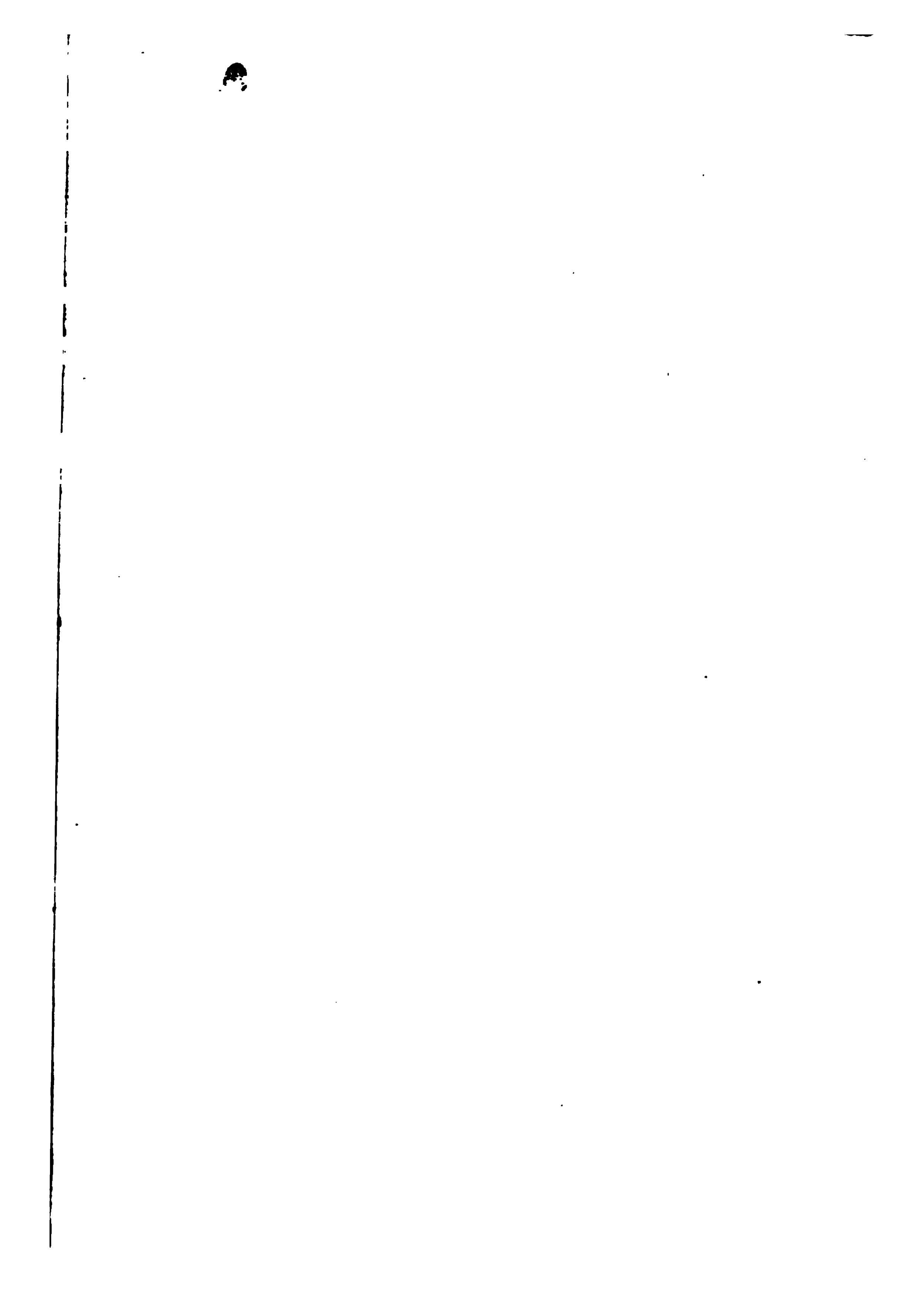

VE
RI
TAS





DIE MECHANIK

DES

HIMMELS.

VORLESUNGEN

VON

CARL LUDWIG CHARLIER,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LUND.

ZWEITER BAND.

MIT ZAHLREICHEN FIGUREN.



LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1907

Haven Fund.

Dec. 6, 1905 – Dec. 28, 1907.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Schlusswort.

Den zweiten Band meiner Vorlesungen über die Mechanik des Himmels habe ich mit einem Abschnitt über *Mechanische Quadratur* eingeleitet. Da das Problem der drei Körper in complicirteren Fällen nicht analytisch integrirt werden kann, hat man, besonders in der letzten Zeit, sich der mechanischen Quadratur bedient, um derartige Fälle zu behandeln, und es erschien deswegen angemessen, die betreffenden Methoden auseinanderzusetzen. Ich habe an einem ausführlichen Beispiel gezeigt, wie man bei der canonischen Form der Bewegungsgleichungen zweckmässig die Rechnungen anordnen soll. Durch die Untersuchungen von Jacobi und Malmsten, die ich hier auseinandergesetzt habe, ist der Werth des Restgliedes in der Euler'schen Reihe gut bekannt. Ich mache darauf aufmerksam, dass es nicht unmöglich erscheint, diese Restuntersuchungen zu erweitern, so dass man im Stande sein wird, die zu befürchtenden Fehler in einer mechanischen Integration direct zu beurtheilen, was von grosser Bedeutung für den numerischen Rechner sein würde.

Bei der Besprechung der *periodischen Lösungen* halte ich mich ziemlich ausführlich bei solchen in der Nähe der Librationscentra auf. Spätere Entdeckungen haben die practische Wichtigkeit dieser Lösungen dargethan. Die grundlegende Arbeit Hill's über periodische Lösungen in der Nähe der Massen gebe ich vollständig wieder. Dann folgt die Methode Poincaré's zur Aufsuchung periodischer Bahnen und ihre Anwendung auf Lösungen der verschiedenen Gattungen. In Bezug auf die periodischen Lösungen der dritten Gattung zeige ich, wie solche Lösungen mit endlichen Werthen der Bahnexcentricitäten gefunden werden können. Dagegen habe ich nachträglich gefunden, dass meine Behauptung, dass die von Poincaré gefundenen kreisförmigen Lösungen dieser

Gattung nicht stattfinden würden, *nicht* stichhaltig ist. Die Elemente Γ und Γ' sind zur Aufsuchung solcher Lösungen nicht geeignet, wie aus § 8 hervorgeht.

Im zehnten Abschnitt behandle ich die Frage von der *Convergenz der Reihen* in der Mechanik des Himmels. Betreffend das Problem der zwei Körper liegt meines Wissens hier zum ersten Male eine vollständige Behandlung hierher gehörender Convergenzfragen vor. Die betreffenden Vorlesungen wurden im Frühjahr 1903 gehalten und lagen im September desselben Jahres gedruckt vor, obgleich die Veröffentlichung erst später geschehen konnte. Im März 1904 hat Levi-Civita der Accademia dei Lincei eine Abhandlung eingereicht, worin er die Lage der singulären Punkte der Kepler'schen Gleichung bestimmt und zu ähnlichen Resultaten wie den meinigen kommt. Eine Lücke ist in den Untersuchungen der Paragraphen 1 und 2 insofern vorhanden, als in Bezug auf die *hyperbolische* Bewegung die Entwickelungen nach Potenzen der Excentricität nicht untersucht worden sind. Diese Lücke ist später von Block ausgefüllt worden (Meddelanden pån Lunds Observatorium No. 23).

In Bezug auf das Problem der drei Körper untersuche ich die Entwickelung nach Potenzen der störenden Massen und die Reihen in der Störungstheorie. Das wichtige Theorem von Bruns und die interessanten Untersuchungen Gyldén's über die Wahrscheinlichkeit der Divergenz sind hier von grundlegender Bedeutung. Der Abschnitt endet mit dem Nachweis, dass man bei den practischen Anwendungen der Störungstheorie zwar Reihen erhält, die eine gewisse Zeit convergiren, dass aber bei dem jetzigen Standpunkt der Theorie mit der Zeit wachsende Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung auftreten können, ohne dass es möglich ist zu entscheiden, ob diese Differenzen von der Einwirkung fremder Körper herrühren oder auf die Unvollkommenheit der Theorie zurückzuführen sind.

Giebt es eine für practische Zwecke anwendbare *Form der Integrale des Problems der drei Körper*, welche für alle Zeiten gültig ist? Die Frage muss vorläufig offen bleiben. Das wichtigste Streben des theoretischen Astronomen ist augenblicklich, eine solche Form aufzusuchen. Ich vermag nicht zu sagen, ob man dem Ziele nahe

ist oder nicht. Es ist indessen sehr schwierig, eine Übersicht von Untersuchungen zu geben, welche bis jetzt zu keinem Abschluss gekommen sind.

Im § 1 des elften Abschnittes leite ich das wichtige Transformationstheorem von Jacobi ab. Im Anschluss hierzu zeige ich, wie man das Theorem in zwei verschiedenen Richtungen erweitern kann, deren ich mich bediene, um bei der Behandlung des Problems der drei Körper vom Zwei-Centren-Problem auszugehen. Dieser Weg scheint viel versprechend, und ich habe in den Vorlesungen einige Schritte zur weiteren Verfolgung des Problems gethan, ohne indessen bis jetzt zu einem Abschluss gekommen zu sein.

In § 2 gebe ich eine vollständige Behandlung von mechanischen Problemen mit einem Freiheitsgrad, die in § 4 auf das Delaunay sche Problem ihre Anwendung findet.

Mit Hilfe dieser Untersuchungen über das Delaunay'sche Problem werden in § 5 und § 6 die Commensurabilitäten niedrigen und höheren Grades untersucht. Die Discontinuitäten, welche bei den Commensurabilitäten höheren Grades auftreten, bilden die grösste Schwierigkeit bei der Aufsuchung einer allgemein gültigen Form für die Integrale des Problems der drei Körper.

Die drei letzten Paragraphen sind der trigonometrischen Form dieser Integrale gewidmet. Die von Tisserand versuchte Methode, mit Hilfe der Delaunay'schen Transformationen zu dieser Form zu gelangen, wird erörtert. Sie scheitert an den Commensurabilitäten höheren Grades, die übrigens in der einen oder der anderen Form auch alle anderen bis jetzt aufgestellten Methoden, zu dieser Form zu gelangen, illusorisch machen. Im § 8 wird gezeigt, dass man in Bezug auf das asteroidische Drei-Körper-Problem zu practisch anwendbaren trigonometrischen Reihen gelangen kann, die für die kleinen Planeten mit ihren raschen Perihel- und Knoten-Bewegungen den störungstheoretischen Reihen mit Entwickelungen nach Potenzen der Zeit vorzuziehen sind.

Im neunten Paragraphen wird die Methode von Bohlin, zu einer trigonometrischen Form der Integrale zu gelangen, auseinandergesetzt. Sie besitzt die Eigenthümlichkeit, die kleinen Divisoren gänzlich zu vermeiden. Diese treten indessen anderswo in ver-

kleideter Form auf und üben immer noch ihren nachtheilgen Einfluss auf die Convergenz aus.

Es war meine Absicht, an diesen Untersuchungen die mit den Stabilitätsfragen in Zusammenhang stehenden Probleme zu erörtern. Es handelt sich dabei theils um die Stabilität der verschiedenen particularen Lösungen zum Problem der drei Körper, theils um die Frage von der Stabilität im Planetensystem. Diese kann so formulirt werden: sind die Abstände der Planeten von der Sonne für alle Zeiten zwischen endlichen von Null verschiedenen Grenzen eingeschlossen? Verschiedene Betrachtungen, die zum Theil in den hier vorliegenden Vorlesungen zu finden sind, haben mich im Laufe der Zeit zur Ueberzeugung geführt, dass diese Frage *verneinend* beantwortet werden muss. Ich halte es indessen noch verfrüht, die Gründe dieser Ueberzeugung auseinanderzusetzen, und habe daher die Behandlung der Stabilitätsfragen hier nicht mit aufgenommen.

Indem ich diesen Band abschliesse, erlaube ich mir den Herren, die mir in der einen oder der anderen Weise bei der Fertigstellung desselben behilflich gewesen sind, meinen herzlichen Dank auszusprechen. Ich richte mich dabei in erster Reihe an Herrn Prof. Brendel, der mit nie versagender Geduld die Abzüge auch von diesem Band in Bezug auf die deutsche Sprache verbessert hat. Herr Cand. G. Norén ist mir in vieler Hinsicht bei der Ausarbeitung der Vorlesungen behilflich gewesen und hat im Besonderen den grössten Theil der numerischen Rechnungen des achten Abschnittes ausgeführt, wofür ich ihm hiermit meinen besten Dank abstatte. Herrn Dr. A. Wilkens verdanke ich ein sorgfältiges Verzeichniss der Druckfehler im ersten Bande, das zum Theil am Ende dieses Bandes wiederzufinden ist.

Zuletzt will ich dem Herrn Verleger für die Geduld, mit welcher er Verspätungen meinerseits mit der Fertigstellung des Manuscriptes u. dergl. aufgenommen hat, meinen besten Dank aussprechen.

Lund, den 18. September 1907.

C. V. L. Charlier.

Inhalt.

Achter Abschnitt.

Mechanische Quadratur.

Neunter Abschnitt.

Periodische Lösungen.

Zehnter Abschnitt.

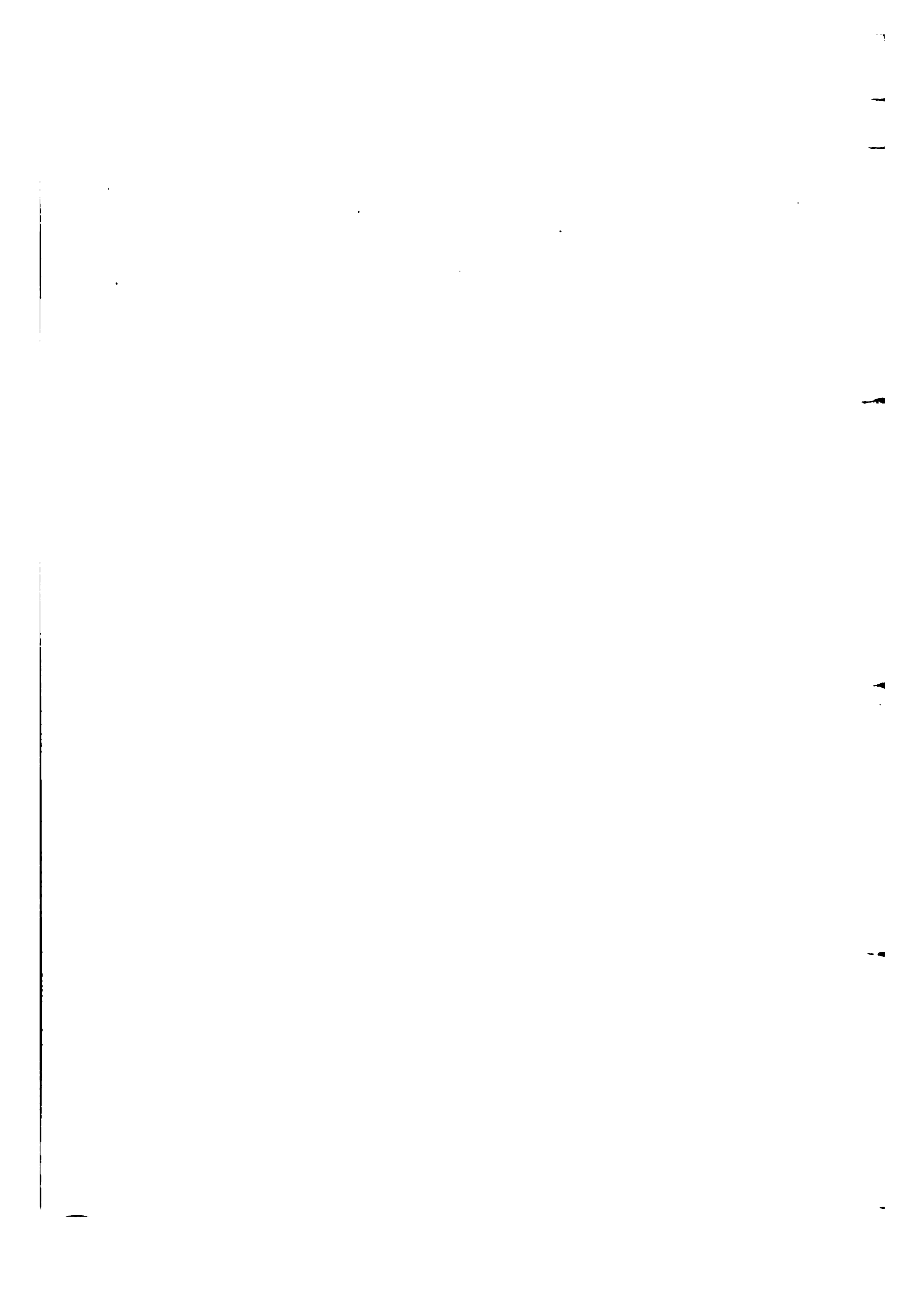
Convergenz der Reihen in der Mechanik des Himmels.

Elfter Abschnitt.

Ueber die Form der Integrale im Problem der drei Körper.

ACHTER ABSCHNITT

MECHANISCHE QUADRATUR



§ I. Die Euler'sche Summationsformel.

Unter dem Namen *mechanische Quadratur* werden alle solchen Rechenoperationen verstanden, mittelst welcher man den Werth eines Integrals berechnen kann, ohne die Integration analytisch auszuführen. Die Methoden, die man zu diesem Zwecke benutzt, lassen sich mehr oder weniger direct auf eine Formel zurückführen, die ungefähr gleichzeitig von Maclaurin und von Euler gefunden wurde, und die gewöhnlich mit dem Namen *Euler'sche Summationsformel* oder *Euler'sche Reihe* bezeichnet wird. Ich habe es deswegen für zweckmässig betrachtet, diesen Abschnitt mit der ausführlichen Auseinandersetzung der Eigenschaften dieser interessanten Formel anzufangen. — Der Uebergang zu den gewöhnlichen Formeln für mechanische Quadratur geschieht dann ohne Schwierigkeit. Dieser Weg hat ausserdem den wichtigen Vortheil, dass man mit Hilfe der eingehenden Untersuchungen über die Euler'sche Reihe zu einer Auffassung der Grösse des Fehlers, den man bei einer numerischen Berechnung des Integrals zu befürchten hat, gelangen kann.

Um die Euler'sche Summationsformel abzuleiten, geht man von der Identität

$$f(a+\omega) - f(a) = \int_0^\omega f'(a+\omega-z)\,dz$$

aus. Durch theilweise Integration giebt diese

$$\int_0^\omega f'(a+\omega-z)\,dz = \Big/_{\!0}^{\,\omega} z f'(a+\omega-z) + \int_0^\omega z f''(a+\omega-z)\,dz,$$

so dass

$$f(a+\omega)-f(a)=\omega f'(a)+\int\limits_0^\omega z\,f''(a+\omega-z)\,dz$$

ist.

Wird dies Verfahren weiter fortgesetzt, so erhält man

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta f(a)=f(a+\omega)-f(a)=\dfrac{\omega}{\underline{|1}}f'(a)+\dfrac{\omega^2}{\underline{|2}}f''(a)+\ldots+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{\omega^n}{\underline{|n}}f^n(a)+\displaystyle\int\limits_0^\omega\dfrac{z^n}{\underline{|n}}P\,dz, \end{cases}$$

wo

$$P=f^{n+1}(a+\omega-z).$$

Durch Differentiation erhält man aus (1)

$$\Delta f'(a)=f'(a+\omega)-f'(a)=\frac{\omega}{1}f''(a)+\frac{\omega^2}{\underline{|2}}f'''(a)+\ldots+$$

$$+\frac{\omega^n}{\underline{|n}}f^{n+1}(a)+\int\limits_0^\omega\frac{z^n}{\underline{|n}}f^{n+2}(a+\omega-z)\,dz.$$

Durch theilweise Integration erhält man aber

$$\int\limits_0^\omega\frac{z^n}{\underline{|n}}f^{n+2}(a+\omega-z)\,dz=-\frac{\omega^n}{\underline{|n}}f^{n+1}(a)+\int\limits_0^\omega\frac{z^{n-1}}{\underline{|n-1}}P\,dz.$$

Man hat also

$$\Delta f(a)=\frac{\omega}{\underline{|1}}f'(a)+\frac{\omega^2}{\underline{|2}}f''(a)+\frac{\omega^3}{\underline{|3}}f'''(a)+\ldots+\frac{\omega^n}{\underline{|n}}f^n(a)+\int\limits_0^\omega\frac{z^n}{\underline{|n}}P\,dz,$$

$$\Delta f'(a)=\qquad\frac{\omega}{\underline{|1}}f''(a)+\frac{\omega^2}{\underline{|2}}f'''(a)+\ldots+\frac{\omega^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^n(a)+\int\limits_0^\omega\frac{z^{n-1}}{\underline{|n-1}}P\,dz,$$

$$\Delta f''(a) = \frac{\omega}{\underline{|1}} f'''(a) + \ldots + \frac{\omega^{n-2}}{\underline{|n-2}} f^{n}(a) + \int_0^{\omega} \frac{z^{n-2}}{\underline{|n-2}} P\,dz\,,$$

. . . .

$$\Delta f^{n-1}(a) = \qquad\qquad \frac{\omega}{\underline{|1}} f^{n}(a) + \int_0^{\omega} \frac{z}{\underline{|1}} P\,dz\,,$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit 1, $A_1\,\omega$, $A_2\,\omega^2, \ldots, A_{n-1}\,\omega^{n-1}$ multiplicirt und die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ so bestimmt, dass, wenn sämmtliche Gleichungen summirt werden, die Coefficienten von $f''(a)$, $f'''(a), \ldots, f^{n}(a)$ auf der rechten Seite verschwinden, so erhält man

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta f(a) + A_1\,\omega\,\Delta f'(a) + A_2\,\omega^2\,\Delta f''(a) + \ldots + A_{n-1}\,\omega^{n-1} f^{n-1}(a) = \\ \qquad = \omega f'(a) - R_n\,, \end{cases}$$

wo

$$(3)\qquad R_n = -\int_0^{\omega} \left[\frac{z^{n}}{\underline{|n}} + A_1 \frac{z^{n-1}\,\omega}{\underline{|n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{z\,\omega^{n-1}}{\underline{|1}} \right] P\,dz\,.$$

Die Formel (2) ist die Euler'sche Reihe.

Die Coefficienten A_1, A_2 u. s. w. sind durch folgende Formeln bestimmt:

$$\frac{1}{\underline{|2}} + A_1 = 0\,,$$

$$\frac{1}{\underline{|3}} + \frac{A_1}{\underline{|2}} + A_2 = 0\,,$$

$$\frac{1}{\underline{|4}} + \frac{A_1}{\underline{|3}} + \frac{A_2}{\underline{|2}} + A_3 = 0\,,$$

. . . .

$$\frac{1}{\underline{|n}} + \frac{A_1}{\underline{|n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{\underline{|2}} + A_{n-1} = 0\,,$$

durch welche die Coefficienten A_1, A_2 u. s. w. successive berechnet werden können.

Führt man die Bezeichnung

$$\Phi_r(u) = \frac{u^r}{\lfloor r} + \frac{A_1 u^{r-1}}{\lfloor r-1} + \dots + \frac{A_{r-1} u}{\lfloor 1} \tag{4}$$

ein, so können die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten A_1, A_2 u. s. w. kurz in der Form

$$\Phi_r(1) = 0 \qquad (r = 2, 3 \dots n) \tag{5}$$

geschrieben werden.

Wird in den Ausdruck (3) für R_n

$$z = u\omega$$

eingesetzt, so bekommt man

$$R_n = -\omega^{n+1} \int_0^1 \Phi_n(u) P du. \tag{6}$$

Die Untersuchung über das Restglied — R_n — der Euler'schen Reihe, wie diejenige über den Werth der Coefficienten A_r hängt also nahe mit den Eigenschaften der Function $\Phi(u)$ zusammen. Wir wollen deswegen zuerst diese Function näher untersuchen.

Wir bemerken zuerst, dass nach (4) und (5)

$$\Phi_r(0) = 0 = \Phi_r(1). \tag{7}$$

Zum näheren Studium der Function Φ bedient man sich mit Vortheil der Hilfsfunction

$$f(v) = \frac{v}{e^v - 1}. \tag{8}$$

Wird diese Function nach Potenzen von v entwickelt, setzt man also

$$f(v) = 1 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots, \tag{8*}$$

so ist

$$v = (e^v - 1)\sum a_i v^i$$
$$= \left(v + \frac{v^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \dots\right)(1 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots),$$

und man bekommt zur Bestimmung der Coefficienten die Gleichungen

$$0 = \frac{1}{2!} + a_1$$
$$0 = \frac{1}{3!} + \frac{a_1}{2!} + a_2$$
$$\dots\dots\dots,$$

so dass also die Coefficienten a_1, a_2 u. s. w. mit den Coefficienten A_1, A_2 u. s. w. zusammenfallen.

Hieraus leitet man leicht den Satz ab, dass alle Coefficienten A_i mit *ungeraden* Indices verschwinden, mit Ausnahme von A_1, der gleich $-\frac{1}{2}$ ist. Man hat in der That

$$\frac{v}{e^v - 1} = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} \cdot \frac{e^v + 1}{e^v - 1}.$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes ist aber eine *gerade* Function von v und wird nicht verändert, wenn v gegen $-v$ vertauscht wird, woraus der Satz folgt.

Es ist also

$$(9) \quad \begin{cases} A_{2i+1} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots) \\ A_1 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Weiter ist

$$\frac{v}{e^v - 1} = 1 - \tfrac{1}{2} v + \frac{B_1}{2!} v^2 - \frac{B_2}{4!} v^4 + \frac{B_3}{6!} v^6 + \dots,$$

wo B_1, B_2, B_3 die BERNOULLI'schen Zahlen bezeichnen. Man hat also

$$(10) \quad A_{2i} = (-1)^{i+1} \frac{B_i}{(2i)!}.$$

Nach dem bekannten Ausdruck für die BERNOULLI'schen Zahlen hat man also

$$(10^*)\qquad A_{2i} = \frac{(-1)^{i+1}}{2^{2i-1}\pi^{2i}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2i}}.$$

Die numerischen Werthe der ersten Coefficienten sind

$$A_2 = + \frac{1}{12}, \qquad A_8 = - \frac{1}{1209600},$$

$$A_4 = - \frac{1}{720}, \qquad A_{10} = + \frac{1}{47900160},$$

$$A_6 = + \frac{1}{30240}.$$

Jeder Coefficient ist ungefähr $4\pi^2$ (= 39.4784) mal kleiner als der nächst vorhergehende, wie aus der Formel (10*) unmittelbar hervorgeht.

Die Eigenschaften der Function $\Phi(u)$, die wir noch brauchen, um das Restglied der EULER'schen Reihe näher zu studiren, werden leicht erhalten, wenn man mit SCHLÖMILCH die Function

$$(11)\qquad g(v, u) = v\frac{e^{uv} - 1}{e^v - 1}$$

einführt. Wird diese Function nach Potenzen von v entwickelt, so erhält man offenbar

$$(11^*)\qquad g(v, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(u)\, v^m.$$

Die Formel (11) giebt aber

$$g(v, 1 - u) = g(-v, u) + v,$$

so dass, in Hinsicht auf (11*),

$$(12)\qquad \Phi_m(1 - u) = (-1)^m \Phi_m(u),$$

wo $m = 2, 3, 4, \ldots$

Es ist weiter identisch

$$\frac{1}{2}v\frac{e^{\frac{1}{2}v}-1}{e^v-1}=\frac{\frac{1}{2}v}{e^{\frac{1}{2}v}-1}-\frac{v}{e^v-1},$$

oder

$$\tfrac{1}{2}g(v,\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1}{2}v)-f(v),$$

so dass nach (11*) und (8*)

$$\frac{1}{2}\sum\Phi_m\left(\frac{1}{2}\right)v^m=\sum A_m\left(\frac{v}{2}\right)^m-\sum A_m v^m.$$

Es ist also

$$\Phi_m\left(\frac{1}{2}\right)=2A_m\left(\frac{1}{2^m}-1\right).$$

Diese Formel giebt nach (9)

(13) $$\Phi_{2i+1}(\tfrac{1}{2})=0 \qquad (i=1,2\ldots),$$

wogegen

(13*) $$\Phi_{2i}\left(\frac{1}{2}\right)=-2A_{2i}\left(1-\frac{1}{2^{2i}}\right).$$

Aus (12), (13) und (13*) gehen die wichtigsten Eigenschaften der Functionen $\Phi_{2i}(u)$ und $\Phi_{2i+1}(u)$ leicht hervor. Es ist nämlich

(14) $$\Phi_{2i}(u)=\frac{u^{2i}}{\underline{|2i}}+\frac{A_1u^{2i-1}}{\underline{|2i-1}}+\frac{A_2u^{2i-2}}{\underline{|2i-2}}+\ldots+\frac{A_{2i-2}u^2}{\underline{|2}},$$

und

(14*) $$\Phi_{2i+1}(u)=\frac{u^{2i+1}}{\underline{|2i+1}}+\frac{A_1u^{2i}}{\underline{|2i}}+\frac{A_2u^{2i-1}}{\underline{|2i-1}}+\ldots+\frac{A_{2i}u}{\underline{|1}}.$$

Es ist also im Besonderen

$$\Phi_2(u)=\frac{u^2}{\underline{|2}}+A_1u=\frac{u(u-1)}{2},$$

welche Function für $u = 0$ und für $u = 1$ verschwindet und zwischen diesen Werthen *negativ* bleibt. Die Function hat ein einziges Minimum, das man für $u = \frac{1}{2}$ erhält, und es ist

$$\Phi_2(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{8},$$

übereinstimmend mit (13*).

Es lässt sich nun zeigen — und dies ist der Hauptsatz über die Function $\Phi(u)$ — dass $\Phi_4(u)$, für Werthe von u zwischen 0 und 1, *positiv* ist mit einem einzigen Maximum (für $u = \frac{1}{2}$), dass $\Phi_6(u)$ stets *negativ*, $\Phi_8(u)$ stets *positiv* bleibt u. s. w., vorausgesetzt, dass u zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt.

Um dies zu beweisen, wollen wir annehmen, dass $\Phi_{2i}(u)$ *positiv ist und ein einziges Maximum besitzt zwischen 0 und 1.* Wir wollen dann zeigen, dass $\Phi_{2i+2}(u)$, für Werthe von u zwischen 0 und 1, negativ bleibt und ein einziges Minimum besitzt.

Nach (14) und (14*) hat man

$$\Phi'_{2i+1}(u) = \Phi_{2i}(u) + A_{2i}. \tag{15}$$

Da $\Phi_{2i+1}(0) = \Phi_{2i+1}(1) = 0$ ist, so muss $\Phi'_{2i+1}(u)$, nach dem Theorem von Rolle, wenigstens einmal zwischen 0 und 1 verschwinden. Die Gleichung

$$\Phi_{2i}(u) + A_{2i} = 0 \tag{16}$$

muss also wenigstens für einen Werth von u zwischen 0 und 1 befriedigt sein. Da nach der Voraussetzung $\Phi_{2i}(u)$ positiv ist und zwischen den genannten Grenzen ein einziges Maximum besitzt, so muss also die linke Seite von (16) zweimal und *nur zweimal* verschwinden. Hieraus folgt nach (15), dass $\Phi'_{2i+1}(u)$ zwischen 0 und 1 zweimal verschwindet.

Die Function $\Phi_{2i+1}(u)$ besitzt also zwischen 0 und 1 ein einziges Maximum sowie ein einziges Minimum und verschwindet also nur für einen einzigen Werth von u zwischen diesen Grenzen, und zwar ist nach (13)

$$\Phi_{2i+1}(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Nun ist aber nach (14) und (14*)

$$\Phi'_{2i+2}(u) = \Phi_{2i+1}(u). \tag{17}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet für einen einzigen Werth von u zwischen 0 und 1 — nämlich für $u = \frac{1}{2}$ —, folglich verschwindet $\Phi'_{2i+2}(u)$ für einen einzigen Werth von u zwischen diesen Grenzen, d. h. $\Phi_{2i+2}(u)$ hat ein einziges Maximum *oder* Minimum zwischen 0 und 1. Es ist leicht zu zeigen, dass es ein Minimum sein muss.

Da nach der Voraussetzung $\Phi_{2i}(u)$ positiv ist und (16) zwei Wurzeln hat zwischen 0 und 1, so muss offenbar A_{2i} *negativ* sein.

Nach (14*) hat $\Phi_{2i+1}(u)$ für kleine positive Werthe von u dasselbe Zeichen wie A_{2i}, ist also negativ. Folglich ist nach (17) $\Phi'_{2i+2}(u)$ für kleine positive Werthe von u negativ, und da $\Phi_{2i+2}(0) = 0$, so ist also $\Phi_{2i+2}(u)$ für kleine positive Werthe von u negativ und muss also, nach dem Obigen, zwischen 0 und 1 *negativ* bleiben.

Wäre $\Phi_{2i}(u)$ negativ gewesen und hätte es ein einziges Minimum zwischen 0 und 1 gehabt, so hätte man in ähnlicher Weise bewiesen, dass $\Phi_{2i+2}(u)$ zwischen denselben Grenzen ein einziges Maximum besitzt und positiv bleibt.

Nun haben wir oben gesehen, dass $\Phi_2(u)$ negativ ist zwischen 0 und 1, und ein einziges Minimum besitzt; folglich muss, innerhalb derselben Grenzen, $\Phi_4(u)$ positiv sein und ein einziges Maximum haben; $\Phi_6(u)$ bleibt negativ u. s. w.

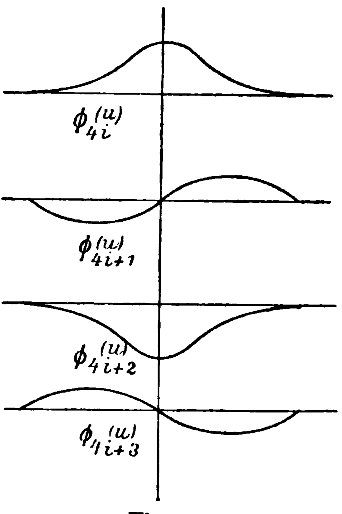


Fig. 1.

Die Functionen $\Phi_r(u)$ haben also das Aussehen, das durch die nebenstehenden Zeichnungen (Fig. 1) dargestellt wird. Die Richtung der Tangenten in den Punkten 0, $\frac{1}{2}$, 1 ergiebt sich aus den Formeln (15) und (17), welche geben:

$$\Phi'_{2i}(0) = \Phi'_{2i}(\tfrac{1}{2}) = \Phi'_{2i}(1) = 0.$$

$$\Phi'_{2i+1}(0) = \Phi'_{2i+1}(1) = A_{2i}.$$

$$\Phi'_{2i+1}\left(\frac{1}{2}\right) = - A_{2i} + \frac{A_{2i}}{2^{2i-1}}.$$

Wir haben also gezeigt:

1) dass $\Phi_{2n}(u)$ nicht das Zeichen wechselt zwischen $u = 0$ und $u = 1$;
2) dass $\Phi_{2n}(u)$, zwischen den genannten Grenzen, negativ ist für n ungerade und positiv für n gerade;
3) dass der Maximalwerth von $\Phi_{2n}(u)$ ist

$$\text{Max. } \Phi_{2n}(u) = -2A_{2n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

der für $u = \frac{1}{2}$ erreicht wird.

Mit Hilfe dieser Sätze lässt sich der Werth des Restgliedes der EULER'schen Reihe leicht discutiren. Es ist in der That nach (6)

$$R_{2n} = -\omega^{2n+1}\int_0^1 \Phi_{2n}(u)\,P\,du$$

oder

$$R_{2n} = -\omega^{2n+1}\int_0^1 \Phi_{2n}(u)\,f^{2n+1}\big(a + \omega(1-u)\big)\,du. \tag{18}$$

Ein bekannter Satz aus der Integralrechnung sagt aber aus, dass, wenn $F(x)$ und $G(x)$ zwei Functionen einer reellen Veränderlichen x bezeichnen und $G(x)$ zwischen den Integrationsgrenzen das Zeichen nicht wechselt, sondern entweder stets positiv oder stets negativ bleibt,

$$\int_a^b F(x)\,G(x)\,dx = F\big(a + \theta(b-a)\big)\int_a^b G(x)\,dx \tag{19}$$

ist, wo θ positiv und kleiner als 1 ist.

Da nun bewiesen worden ist, dass $\Phi_{2i}(u)$ zwischen 0 und 1 das Zeichen nicht wechselt, so können wir die Formel (19) auf (18) anwenden, und wir bekommen dann

$$R_{2n} = -\omega^{2n+1} f^{2n+1}(a + \theta\omega) \int_0^1 \Phi_{2n}(u)\, du,$$

oder nach (15)

$$R_{2n} = A_{2n}\, \omega^{2n+1} f^{2n+1}(a + \theta\omega). \tag{20}$$

Dieser allgemeine Ausdruck für das Restglied in der EULER'schen Reihe ist zuerst von MALMSTEN gegeben worden (CRELLE's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. XXXV (1847), abgedruckt in Acta Mathematica T. 5).

Der MALMSTEN'sche Ausdruck für das Restglied ist allgemein und vollständig unabhängig von den Eigenschaften der Function $f(a)$ und ist in den meisten Fällen auch bequem anzuwenden. Der folgende Ausdruck, der von JACOBI herrührt (CRELLE, Bd. XII), ist zwar nicht immer anwendbar, führt aber zu einer noch bequemeren Formel für das Restglied.

Wenn nämlich $f^{2n+1}(a + \omega(1-u))$ *zwischen den Grenzen* $u = 0$ *und* $u = 1$ *das Zeichen nicht wechselt,* kann man nach (19) schreiben

$$\begin{aligned} R_{2n} &= -\omega^{2n+1} \Phi_{2n}(\theta) \int_0^1 f^{2n+1}(a + \omega(1-u))\, du \\ &= -\omega^{2n} \Phi_{2n}(\theta)\left[f^{2n}(a+\omega) - f^{2n}(a)\right]. \end{aligned}$$

Nun haben wir aber bewiesen, dass die Function $\Phi_{2n}(\theta)$ $(0 < \theta < 1)$ das Zeichen nicht wechselt und für $\theta = \frac{1}{2}$ ihren Maximalwerth erreicht, und zwar ist

$$\Phi_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = -2A_{2n}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right).$$

Man hat also

$$R_{2n} = \omega^{2n}\, 2\theta\, A_{2n}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)\left[f^{2n}(a+\omega) - f^{2n}(a)\right] \tag{21}$$

und somit

$$R_{2n} < \omega^{2n} 2 \,|\, A_{2n} \,|\, [f^{2n}(a + \omega) - f^{2n}(a)]\,. \tag{22}$$

Wenn also $f^{2n+1}(a + \omega(1 - u))$ *zwischen den Grenzen* $u = 0$ *und* $u = 1$ *das Zeichen nicht wechselt, so ist der Fehler, den man zu befürchten hat, wenn man die* EULER*'sche Reihe mit dem Glied*

$$A_{2n-2}\, \omega^{2n-2} \varDelta f^{2n-2}(a)$$

abbricht, kleiner als der doppelte Werth des ersten vernachlässigten Gliedes.

Die EULER'sche Reihe gehört bekanntlich im Allgemeinen zu den *divergenten* Reihen. Wenn aber die Grösse des Restgliedes bekannt ist, so liegt natürlich nichts im Wege für die Anwendung solcher Reihen. Wenn z. B. der Ausdruck (21) für das Restglied gültig ist, so weiss man, dass der zu befürchtende Fehler immer kleiner ist als der doppelte Werth des ersten vernachlässigten Gliedes. Man setzt also in diesem Falle ruhig die Reihe so lange fort, bis die Glieder der Reihe zu wachsen anfangen und man braucht also niemals einen grösseren Fehler zu befürchten als den doppelten Betrag des *kleinsten* Gliedes in der Reihe. Andererseits folgt offenbar hieraus, dass man mit Hilfe dieser Reihe im Allgemeinen nicht eine Function mit beliebig grosser Genauigkeit berechnen kann. Es giebt indessen verschiedene Kunstgriffe, durch welche man die Convergenz der Reihe vergrössern kann, wie man an einem Beispiel im nächsten Paragraphen findet.

Die Form (2) für die EULER'sche Reihe war

$$\begin{aligned} \omega f'(a) = f(a + \omega) - f(a) + A_1\, \omega\, [f'(a + \omega) - f'(a)] + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\, \omega^{2i} [f^{2i}(a + \omega) - f^{2i}(a)] + \\ + R_{2n}\,. \end{aligned}$$

Wird hier, statt $f(a)$, eine Function $\lambda(a)$ eingeführt, so definirt, dass

$$\lambda(x) = f'(x)$$

und also

$$\int_a^{a+\omega} \lambda(x)\,dx = f(a+\omega) - f(a),$$

so bekommt man

$$(23)\quad \begin{cases} \omega\,\lambda(a) = \int_a^{a+\omega} \lambda(a)\,da + A_1\,\omega\,[\lambda(a+\omega) - \lambda(a)] + \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\,\omega^{2i}\,[\lambda^{2i-1}(a+\omega) - \lambda^{2i-1}(a)] + \\ \qquad + R_{2n}, \end{cases}$$

oder, wenn man sich erinnert, dass $A_1 = -\frac{1}{2}$,

$$(23^*)\quad \begin{cases} \omega\,\frac{\lambda(a) + \lambda(a+\omega)}{2} = \int_a^{a+\omega} \lambda(a)\,da + \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\,\omega^{2i}\,[\lambda^{2i-1}(a+\omega) - \lambda^{2i-1}(a)] + \\ \qquad + R_{2n}. \end{cases}$$

Wird in (23) a gegen $a+\omega$, $a+2\omega$, $a+3\omega$ u. s. w. vertauscht und die so erhaltenen Gleichungen addirt, so bekommt man:

$$(24)\quad \begin{cases} \omega \sum_{r=0}^{s-1} \lambda(a + r\omega) = \int_a^{a+s\omega} \lambda(x)\,dx + A_1\,\omega\,[\lambda(a+s\omega) - \lambda(a)] + \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\,\omega^{2i}\,[\lambda^{2i-1}(a+s\omega) - \lambda^{2i-1}(a)] + \\ \qquad + R_{2n}^{(s)}, \end{cases}$$

wo

$$(24^*)\quad R_{2n}^{(s)} = A_{2n}\,\omega^{2n+1} \sum_{r=0}^{s-1} \lambda^{2n}(a + r\omega + \theta_r\,\omega),$$

wenn wir den allgemeinen Malmsten'schen Ausdruck für das Restglied benutzen. Hier ist θ_r im Allgemeinen als eine Function von r

zu betrachten. Wenn $\lambda^{2n}(a + r\omega + \theta\omega)$ für $0 < \theta < 1$ das Zeichen nicht wechselt, und ausserdem $\lambda^{2n-1}(x)$ zwischen $x = a$ und $x = a + s\omega$ stetig wächst oder stetig abnimmt, kann man den JACOBI'schen Ausdruck (21) für das Restglied anwenden und erhält einfach:

$$R_{2n}^{(s)} = \omega^{2n} 2\theta A_{2n} [\lambda^{2n-1}(a + s\omega) - \lambda^{2n-1}(a)], \tag{24**}$$

so dass auch in diesem Falle das Restglied kleiner als der doppelte Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes ist.

Die Formel (24) wird öfters in der folgenden Form geschrieben:

$$\begin{aligned}\omega \sum_{r=0}^{s-1} \lambda(a + r\omega) = C + \int_a^{a+s\omega} \lambda(a)\,da + A_1\,\omega\,\lambda(a + s\omega) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\,\omega^{2i}\,\lambda^{2i-1}(a + s\omega) + \\ + \omega^{2n} . 2\theta A_{2n} \lambda^{2n-1}(a + s\omega),\end{aligned}$$

wo unter C eine Constante verstanden wird. Diese Schreibweise ist aber offenbar im Allgemeinen nicht gestattet. Es ist in der That

$$\begin{aligned}C = & - A_1\,\omega\,\lambda(a) \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\,\omega^{2i}\,\lambda^{2i-1}(a) \\ & - \omega^{2n} . 2\theta A_{2n} \lambda^{2n-1}(a),\end{aligned}$$

und ist also C keine Constante, sondern ihr Werth hängt von n ab. Auch wenn man in diesen Formeln n gegen die Unendlichkeit wachsen lassen wollte, so würde die obige Schreibweise im Allgemeinen nicht zulässig sein, da die Summe

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{2i}\,\omega^{2i}\,\lambda^{2i-1}(a)$$

im Allgemeinen divergent ist, und der Werth für C also entweder unendlich gross oder unbestimmt ausfallen würde.

Wir werden also im Folgenden uns der Form (24) für die EULER'sche Reihe bedienen, und je nach den Umständen die Form (24*) oder die Form (24**) für das Restglied anwenden.

Die Formel (24) wird gewöhnlich die *EULER'sche Summationsformel* genannt, weil man sie anwenden kann, um die in der linken Seite gezeichnete Summe zu berechnen, wenn der Werth des Integrals $\int \lambda(a)$ bekannt ist.

Umgekehrt kann man aber dieselbe Formel auch benutzen, um den Werth des Integrals der rechten Seite zu finden. Wird die Aufgabe gestellt, das Integral

$$\int_a^b \lambda(x)\,dx$$

zu finden, wird das Intervall $b-a$ in s Theile von gleicher Länge (ω) getheilt, so dass

$$\omega = \frac{b-a}{s}.$$

Man kann dann mit Hilfe der Formel (24) das Integral aus den Werthen der Function $\lambda(x)$, für

$$x = a + r\,\omega \qquad (r = 0, 1 \ldots, s-1),$$

und aus den Werthen der abgeleiteten Functionen von $\lambda(x)$, für $x = a + s\,\omega$ und $x = a$, berechnen.

In dieser Fassung enthält die Formel (24) die allgemeine Lösung der Aufgabe, den Werth eines Integrals durch *mechanische Quadratur* zu berechnen.

§ 2. Anwendungen der EULER'schen Reihe.

Wir wollen die EULER'sche Reihe zuerst benutzen, um einige *Summationen* auszuführen. Als erstes Beispiel nehmen wir die classische sogen. STIRLING'sche Formel.

Wir setzen

$$\lambda(x) = \log x\,.$$

Es ist nun

$$\lambda^{2i-1}(x) = \frac{\underline{|2i-2}}{x^{2i-1}}, \qquad \lambda^{2i}(x) = -\frac{\underline{|2i-1}}{x^{2i}},$$

und mithin nach (24)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \omega\sum_{r=0}^{s-1}\log(a+r\omega) = \int_a^{a+s\omega}\log x\,dx - \frac{1}{2}\,\omega\left[\log(a+s\omega) - \log a\right] \\ + \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\,\underline{|2i-2}\,\omega^{2i}\left[\frac{1}{(a+s\,\omega)^{2i-1}} - \frac{1}{a^{2i-1}}\right] \\ + R_{2n}^{(s)}, \end{aligned}\right.$$

oder wenn man

$$a = 1, \qquad \omega = 1$$

setzt und die Integration ausführt

$$\begin{aligned} \log \underline{|s} = (s+\tfrac{1}{2})\log(s+1) - s \\ + \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\,\underline{|2i-2}\left[\frac{1}{(s+1)^{2i-1}} - 1\right] \\ + R_{2n}^{(s)}. \end{aligned}$$

Man kann hier den JACOBI'schen Ausdruck für das Restglied benutzen (weil die $\lambda^{2i}(x)$ für alle x, die hier in Frage kommen, negativ sind, und die $\lambda^{2i-1}(x)$ zwischen $x = 1$ und $x = s+1$ stetig abnehmen), der Fehler ist also immer kleiner als der doppelte Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes.

Wird in dem obigen Ausdruck s gegen $s-1$ vertauscht, und dann beiderseits $\log s$ addirt, so ist also

$$\begin{aligned} \log \underline{|s} = (s+\tfrac{1}{2})\log s - s + 1 \\ + \sum A_{2i}\,\underline{|2i-2}\left[\frac{1}{s^{2i-1}} - 1\right], \end{aligned}$$

oder, nach Einsetzung der numerischen Werthe der Coefficienten,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\log \lfloor\underline{s} = \left(s + \frac{1}{2}\right)\log s - s + 1 \\
+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{s} - 1\right) \\
- \frac{1}{360}\left(\frac{1}{s^3} - 1\right) \\
+ \frac{1}{1260}\left(\frac{1}{s^5} - 1\right) \\
- \frac{1}{1680}\left(\frac{1}{s^7} - 1\right) \\
+ \frac{1}{1188}\left(\frac{1}{s^9} - 1\right) \\
- \dots
\end{aligned}
\right.
$$

Die Glieder fangen hier an zu wachsen, und man erreicht also die grösste Genauigkeit, wenn man mit dem Glied

$$\frac{1}{1260}\left(\frac{1}{s^5} - 1\right)$$

die Reihe abbricht.

Man würde indessen leicht eine andere Reihe für $\log \lfloor\underline{s}$ erhalten können, mit welcher man eine bedeutend grössere Genauigkeit erhalten könnte. Setzt man nämlich zu diesem Zwecke in (1) $a = 2$, so kann man die Genauigkeit viel weiter treiben, oder man setzt $a = 3$ (und addirt $\log 2$ auf beiden Seiten), in welchem Falle die Convergenz eine noch grössere wird.

Als zweites Beispiel setzen wir

$$\lambda(x) = \sin x,$$

und erhalten

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega \sum_{r=1}^{s-1} \sin(a + r\omega) = -\cos(a + s\omega) + \cos a - \tfrac{1}{2}\omega\,[\sin(a + s\omega) - \sin a] \\
+ \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{2i} A_{2i} (-1)^{i+1} [\cos(a + s\omega) - \cos a] \\
+ R_{2n}^{(s)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Der JACOBI'sche Ausdruck für das Restglied kann nur ausnahmsweise hier benutzt werden (für kleine ω und s). Indessen zeigt der MALMSTEN'sche Ausdruck § 1 (24*) unmittelbar, dass das Restglied gegen Null geht, wenn nämlich [mit Hinsicht auf § 1 (10*)]

$$|\omega| < 2\pi$$

ist, in welchem Falle die Formel (3) benutzt werden kann, um die Summe auf der linken Seite von (3) mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Wir bekommen also in diesem Falle

$$(4)\quad \tfrac{1}{2}\omega[\sin(a+s\omega)-\sin a]+\omega\sum_{r=1}^{s-1}\sin(a+r\omega)=B[\cos(a+s\omega)-\cos a],$$

wo

$$B=-1+\sum_{i=1}^{\infty}A_{2i}(-1)^{i+1}\omega^{2i}.$$

Es ist bemerkenswerth, dass B nur von ω, nicht aber von a und s abhängig ist.[1]

Die Anwendung der EULER'schen Reihe zur Summation von Reihen spielt seit langer Zeit eine grosse Rolle in der Analysis. Sie ist auch zu diesem Zwecke sehr bequem, so oft die Discussion des Restgliedes ausgeführt werden kann.

Von grösserer Bedeutung dürfte indessen ihre Anwendung zur numerischen Berechnung von Integralen sein. Die Formel § 1 (24) wird dann in folgender Form geschrieben

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^{a+s\omega}\lambda(x)\,dx = \omega\sum_{r=0}^{s-1}\lambda(a+r\omega)+\tfrac{1}{2}\omega[\lambda(a+s\omega)-\lambda(a)]- \\ \displaystyle\qquad -\sum_{i=1}^{n-1}A_{2i}\,\omega^{2i}[\lambda^{2i-1}(a+s\omega)-\lambda^{2i-1}(a)]- \\ \qquad - R_{2n}^{(s)}, \end{cases}$$

[1] Im Hinblick auf § 1 (10) ergiebt sich, dass

$$B=-\frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$$

ist.

wo

$$(5^*)\qquad R_{2n}^{(s)} = A_{2n}\,\omega^{2n+1}\sum_{r=0}^{s-1}\lambda^{2n}(a+\theta_r\,\omega+r\,\omega)\,.$$

Ist ein Integral

$$\int_a^b \lambda(x)\,dx$$

vorgelegt, so wird das Intervall $b-a$ in s Theile von gleicher Grösse getheilt, und man kann dann nach (5) den Werth des Integrals berechnen aus den speciellen Werthen der Function und ihrer abgeleiteten Functionen. Sehr oft kann man sich dabei mit der ersten Zeile rechter Hand in (5) begnügen, wenn nur ω klein genug genommen wird. Mittelst (5*) lässt sich dann die Genauigkeit des Resultates beurtheilen.

Es kann vorkommen, dass alle abgeleiteten Functionen ungerader Ordnung für $x=a$ und $x=a+s\,\omega$ verschwinden, in welchem Falle die zweite Zeile rechter Hand in (5) verschwindet, so dass

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}\int_a^{a+s\omega}\lambda(x)\,dx = \omega\sum_{r=0}^{s-1}\lambda(a+r\,\omega)+\tfrac{1}{2}\,\omega\,[\lambda(a+s\,\omega)-\lambda(a)]\,-\\ -\,R_{2n}^{(s)}\end{aligned}\right.$$

ist.

Der untere Index (n) bei dem Restglied kann hier beliebig gewählt werden, ohne dass der Werth des Restgliedes verändert wird. Dagegen dürfte $R_{2n}^{(s)}$ mit wachsendem s gegen Null abnehmen.

Nehmen wir beispielsweise an, dass das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}}$$

vorgelegt wäre. In diesem Falle ist offenbar

$$\lambda^{2i-1}(o) = \lambda^{2i-1}(\pi) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots),$$

und die Berechnung geschieht nach der Formel (6). Wird $n = 1$ gesetzt, so ist dann

$$R^{(s)} = A_2\, \omega^3 \sum_{r=0}^{s-1} \lambda''(a + \theta\,\omega + r\,\omega),$$

wo

$$\lambda''(x) = -\frac{\alpha \cos x}{\pi\left[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x\right]^{3/2}} + \frac{3\alpha^2 \sin^2 x}{\pi\left[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x\right]^{5/2}}.$$

Ist α genügend klein, kann man genähert

$$\lambda''(a + \theta\,\omega + r\,\omega) = \frac{\alpha}{\pi}$$

setzen, und man hat also

$$R^{(s)} = A_2 \frac{\omega^3\, s\, \alpha}{\pi},$$

oder, da

$$s\,\omega = \pi, \qquad A_2 = \frac{1}{12}$$

ist,

$$R^{(s)} = \frac{1}{12}\,\alpha\,\omega^2 = \frac{\alpha\,\pi^2}{12\,s^2},$$

durch welche Formel man den Maximalfehler berechnen kann, den man begeht, indem man das genannte Integral durch Theilung des Intervalles (π) in s Theile berechnet.

Aehnliche Betrachtungen gelten, so oft $\lambda(x)$ eine gerade und periodische Function bezeichnet (mit der Periode π) und es sich um die Berechnung des Integrals

$$\int_0^\pi \lambda(x)\, d\,x$$

handelt.

Die weitere Ausdehnung dieser Betrachtungen auf Doppelintegrale führen zu Resultaten, die besonders für die Berechnung der secularen Störungen der Planeten von Interesse sind.

Im Allgemeinen werden indessen die Functionen

$$\lambda^{2i-1}(a + s\,\omega)$$

und

$$\lambda^{2i-1}(a)$$

von Null verschieden sein. Die Formel (5) führt dabei leicht zur Berechnung des Werthes des Integrals, so oft die Ableitungen von $\lambda(x)$ ohne Mühe erhalten werden können. In vielen Fällen empfiehlt es sich indessen, einen anderen Weg einzuschlagen.

Bei der Anwendung der Formel (5) braucht man nämlich die numerischen Werthe der Functionen

$$\lambda(a), \quad \lambda(a + \omega), \quad \lambda(a + 2\omega) \ldots, \quad \lambda(a + s\,\omega).$$

Wird jede Function in dieser Reihe von der nächstfolgenden subtrahirt, so entsteht eine Reihe von *Differenzfunctionen* oder *Differenzen.* Hieraus erhält man in ähnlicher Weise die *zweiten Differenzen*, dann die dritten Differenzen u. s. w. Nun lassen sich aber die Ableitungen verschiedener Ordnung der Function $\lambda(x)$ durch solche Differenzen ausdrücken, und es ist also möglich, die Formel (5) in eine andere umzuformen, wo ausser den Functionswerthen $\lambda(a + r\,\omega)$, $(r = 0, 1, 2 \ldots, s)$ nur die Differenzen verschiedener Ordnung vorkommen. Da aber die Differenzen numerisch viel leichter erhalten werden können als die Ableitungen, so erhält man in dieser Weise eine Formel, die für numerische Rechnungen bedeutende Vorzüge besitzt.

Wir werden im nächsten Paragraphen die Relationen zwischen den Ableitungen einer Function und den Differenzen verschiedener Ordnung aufstellen, um dann im vierten Paragraphen zu den definitiven Formeln für mechanische Quadratur überzugehen.

§ 3. Relationen zwischen Differentialquotienten und Differenzen.

Wir werden uns im Folgenden der Encke'schen Bezeichnungen für die Differenzen bedienen, deren Bedeutung aus dem nachstehenden Differenzschema hervorgeht.

Argument	Function	1ste Diff.	2te Diff.	3te Diff.
$a-2\omega$	$f(a-2\omega)$			
		$f_0'(a-\frac{3}{2}\omega)$		
$a-\omega$	$f(a-\omega)$		$f_0''(a-\omega)$	
		$f_0'(a-\frac{1}{2}\omega)$		$f_0'''(a-\frac{1}{2}\omega)$
a	$f(a)$		$f_0''(a)$	
		$f_0'(a+\frac{1}{2}\omega)$		$f_0'''(a+\frac{1}{2}\omega)$
$a+\omega$	$f(a+\omega)$		$f_0''(a+\omega)$	
		$f_0'(a+\frac{3}{2}\omega)$		
$a+2\omega$	$f(a+2\omega)$			

Es ist also

$$f_0'(a-\tfrac{3}{2}\omega) = f(a-\omega) - f(a-2\omega),$$
$$f_0'(a-\tfrac{1}{2}\omega) = f(a) - f(a-\omega),$$
$$f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) = f(a+\omega) - f(a)$$

u. s. w.

$$f_0''(a-\omega) = f_0'(a-\tfrac{1}{2}\omega) - f_0'(a-\tfrac{3}{2}\omega),$$
$$f_0''(a) = f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) - f_0'(a-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$f_0''(a+\omega) = f_0'(a+\tfrac{3}{2}\omega) - f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$

u. s. w.

Nach dem Theorem von Taylor hat man, vorausgesetzt, dass die betreffenden Reihen convergiren,

$$f(a) = f(a)$$
$$f(a+\omega) = f(a) + \frac{\omega}{\underline{|1}} f'(a) + \frac{\omega^2}{\underline{|2}} f''(a) + \frac{\omega^3}{\underline{|3}} f'''(a) + \ldots$$
$$f(a+2\omega) = f(a) + \frac{2\omega}{\underline{|1}} f'(a) + \frac{2^2\omega^2}{\underline{|2}} f''(a) + \frac{2^3\omega^3}{\underline{|3}} f'''(a) + \ldots$$
$$f(a+3\omega) = f(a) + \frac{3\omega}{\underline{|1}} f'(a) + \frac{3^2\omega^2}{\underline{|2}} f''(a) + \frac{3^3\omega^3}{\underline{|3}} f'''(a) + \ldots$$

u. s. w.

Hieraus erhält man durch Subtraction

$$f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega)=f(a+\omega)-f(a) \qquad =\frac{\omega}{\underline{|1}}f'(a)+\frac{\omega^2}{\underline{|2}}f''(a)+\frac{\omega^3}{\underline{|3}}f'''(a)+\dots$$

$$f_0'(a+\tfrac{3}{2}\omega)=f(a+2\omega)-f(a+\omega)=\frac{\omega}{\underline{|1}}f'(a)+\frac{3\omega^2}{\underline{|2}}f''(a)+\frac{7\omega^3}{\underline{|3}}f'''(a)+\dots$$

$$f_0'(a+\tfrac{5}{2}\omega)=f(a+3\omega)-f(a+2\omega)=\frac{\omega}{\underline{|1}}f'(a)+\frac{5\omega^2}{\underline{|2}}f''(a)+\frac{19\omega^3}{\underline{|3}}f'''(a)+\dots$$

u. s. w.

Werden diese Reihen von einander subtrahirt, so erhält man weiter

$$f_0''(a+\omega)=f_0'(a+\tfrac{3}{2}\omega)-f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega)=\omega^2 f''(a)+\omega^3 f'''(a)+\dots$$

$$f_0''(a+2\omega)=f_0'(a+\tfrac{5}{2}\omega)-f_0'(a+\tfrac{3}{2}\omega)=\omega^2 f''(a)+2\omega^3 f'''(a)+\dots$$

u. s. w.

Hieraus bekommt man

$$f_0'''(a+\tfrac{3}{2}\omega)=f_0''(a+2\omega)-f_0''(a+\omega)=\omega^3 f'''(a)+\dots$$

u. s. w.

Es ist leicht ersichtlich, dass sämmtliche Differenzen durch die Ableitungen der Function $f(a)$ ausgedrückt werden können, und zwar wird die Differenz n^{ter} Ordnung durch Ableitungen der n^{ten} und höheren Ordnungen ausgedrückt.

Wir wollen die Differenzen

$$f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega),\quad f_0''(a+\omega),\quad f_0'''(a+\tfrac{3}{2}\omega)\dots,\quad f_0^n\left(a+\frac{n}{2}\omega\right),\dots$$

mit dem Namen *adjungirte Differenzen* der Function $f(a)$ bezeichnen. Die adjungirten Differenzen der Function $f(a+\omega)$ sind dann

$$f_0'(a+\tfrac{3}{2}\omega),\quad f_0''(a+2\omega)\dots,\quad f_0^n\left(a+\omega+\frac{n}{2}\omega\right),\dots$$

und, allgemein gesprochen, sind alle Differenzen

$$f_0^n\left(a + s\omega + \frac{n}{2}\omega\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

als adjungirte Differenzen der Function $f(a + s\omega)$ zu betrachten.

Wir nehmen nun an, dass wir für $f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\omega\right)$ die folgende Formel erhalten haben

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\omega\right) = \omega^n f^n(a) + A_1^{(n)}\,\omega^{n+1} f^{n+1}(a) + \\ + A_2^{(n)}\,\omega^{n+2} f^{n+2}(a) + A_3^{(n)}\,\omega^{n+3} f^{n+3}(a) + \ldots \end{aligned} \right.$$

Wir können hier a gegen $a + \omega$ vertauschen und erhalten

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} f_0^n\left(a + \omega + \frac{n}{2}\omega\right) = \omega^n f^n(a + \omega) + A_1^{(n)}\omega^{n+1} f^{n+1}(a + \omega) + \\ + A_2^{(n)}\omega^{n+2} f^{n+2}(a + \omega) + \\ + A_3^{(n)}\omega^{n+3} f^{n+3}(a + \omega) + \ldots \end{aligned} \right.$$

Werden $f^n(a + \omega)$, $f^{n+1}(a + \omega)$ u. s. w. nach dem TAYLOR'schen Lehrsatz nach Potenzen von ω entwickelt, bekommen wir hieraus

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f_0^n\left(a + \omega + \frac{n}{2}\omega\right) = \omega^n f^n(a) + \\ + \left(1 + A_1^{(n)}\right)\omega^{n+1} f^{n+1}(a) + \\ + \left(\frac{1}{\underline{|2}} + \frac{A_1^{(n)}}{\underline{|1}} + A_2^{(n)}\right)\omega^{n+2} f^{n+2}(a) + \\ + \left(\frac{1}{\underline{|3}} + \frac{A_1^{(n)}}{\underline{|2}} + \frac{A_2^{(n)}}{\underline{|1}} + A_3^{(n)}\right)\omega^{n+3} f^{n+3}(a) + \ldots \end{aligned} \right.$$

Es ist aber

$$f_0^n\left(a + \omega + \frac{n}{2}\omega\right) - f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\omega\right) = f_0^{n+1}\left(a + \frac{n+1}{2}\omega\right).$$

Indem wir (1) von (3) abziehen, erhalten wir also

$$(4)\quad \begin{cases} f_0^{n+1}\left(a+\frac{n+1}{2}\,\omega\right) = \omega^{n+1} f^{n+1}(a) + \\ \qquad + \left(\frac{1}{\underline{|2}} + A_1^{(n)}\right) \omega^{n+2} f^{n+2}(a) + \\ \qquad + \left(\frac{1}{\underline{|3}} + \frac{A_1^{(n)}}{\underline{|2}} + A_2^{(n)}\right) \omega^{n+3} f^{n+3}(a) + \dots \\ \qquad + \dots \end{cases}$$

Diese Formel kann nach (1) auch in folgender Form geschrieben werden

$$f_0^{n+1}\left(a+\frac{n+1}{2}\,\omega\right) = \omega^{n+1} f^{n+1}(a) + A_1^{(n+1)} \omega^{n+2} f^{n+2}(a) + \\ + A_2^{(n+1)} \omega^{n+3} f^{n+3}(a) + \dots,$$

so dass zwischen den Coefficienten A_1, A_2 u. s. w. folgende Recursionsformeln bestehen

$$(5)\quad \begin{cases} A_1^{(n+1)} = \frac{1}{\underline{|2}} + A_1^{(n)}, \\ A_2^{(n+1)} = \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{A_1^{(n)}}{\underline{|2}} + A_2^{(n)}, \\ A_3^{(n+1)} = \frac{1}{\underline{|4}} + \frac{A_1^{(n)}}{\underline{|3}} + \frac{A_2^{(n)}}{\underline{|2}} + A_3^{(n)}, \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Da

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{\underline{|2}}, \quad A_2^{(1)} = \frac{1}{\underline{|3}}, \quad A_3^{(1)} = \frac{1}{\underline{|4}} \quad \text{u. s. w.},$$

so kann nach (5) die allgemeine Form der Coefficienten $A_1^{(n)}$, $A_2^{(n)}$ u. s. w. gefunden werden. Man bekommt

$$(6)\quad \begin{cases} A_1^{(n)} = \frac{n}{2}, \\ A_2^{(n)} = \frac{n}{24}(3n+1), \\ A_3^{(n)} = \frac{n^2}{48}(\;n+1), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wir haben hier

$$f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\,\omega\right)$$

als adjungirte Differenzen der Function $f(a)$ betrachtet. Man kann mit demselben Recht auch die Differenzen

$$f_0^n\left(a - \frac{n}{2}\,\omega\right)$$

als adjungirte Differenzen von $f(a)$ betrachten. Wenn wir setzen

$$(7)\quad f_0^n\left(a - \frac{n}{2}\,\omega\right) = \omega^n f^n(a) + B_1^{(n)}\,\omega^{n+1} f^{n+1}(a) + B_2^{(n)}\omega^{n+2} f^{n+2}(a) + \dots$$

und a gegen $a - \omega$ vertauschen, erhalten wir nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$\begin{aligned} f_0^n\left(a - \omega - \frac{n}{2}\,\omega\right) = \omega^n f^n(a) &+ \\ &+ (-1 + B_1^{(n)})\,\omega^{n+1} f^{n+1}(a) + \\ &+ \left(\frac{1}{\underline{|2}} - \frac{B_1^{(n)}}{\underline{|1}} + B_2^{(n)}\right)\omega^{n+2} f^{n+2} + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Da

$$f_0^n\left(a - \frac{n}{2}\,\omega\right) - f_0^n\left(a - \omega - \frac{n}{2}\,\omega\right) = f_0^{n+1}\left(a - \frac{n+1}{2}\,\omega\right),$$

so erhalten wir die Recursionsformeln

$$(8)\quad\begin{cases} B_1^{(n+1)} = -\dfrac{1}{\underline{|2}} + B_1^{(n)}, \\[2ex] B_2^{(n+1)} = \quad\dfrac{1}{\underline{|3}} - \dfrac{B_1^{(n)}}{\underline{|2}} + B_2^{(n)}, \\[2ex] B_3^{(n+1)} = -\dfrac{1}{\underline{|4}} + \dfrac{B_1^{(n)}}{\underline{|3}} - \dfrac{B_2^{(n)}}{\underline{|2}} + B_3^{(n)}, \\[1ex] \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Nun ist

$$f_0'(a - \tfrac{1}{2}\omega) = f(a) - f(a-\omega) =$$

$$= \frac{\omega}{\underline{|1}} f'(a) - \frac{\omega^2}{\underline{|2}} f''(a) + \frac{\omega^3}{\underline{|3}} f'''(a) + \ldots,$$

so dass

$$B_1^{(1)} = -\frac{1}{\underline{|2}}, \quad B_2^{(1)} = +\frac{1}{\underline{|3}}, \quad B_3^{(1)} = -\frac{1}{\underline{|4}} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Formeln (8) geben

$$(9)\quad\begin{cases} B_1^{(n)} = -\dfrac{n}{2}, \\[2ex] B_2^{(n)} = \dfrac{n(3n+1)}{24}, \\[2ex] B_3^{(n)} = -\dfrac{n^2(n+1)}{48}, \\[1ex] \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Es ist also

$$(10)\quad\begin{cases} f_0^n\left(a - \dfrac{n}{2}\omega\right) = \omega^n f^n(a) - \dfrac{n}{2}\omega^{n+1} f^{n+1}(a) + \dfrac{n(3n+1)}{24}\omega^{n+2} f^{n+2}(a) - \\[2ex] \qquad - \dfrac{n^2(n+1)}{48}\omega^{n+3} f^{n+3}(a) + \ldots \end{cases}$$

Ist n eine ungerade Zahl, so lauten die Gleichungen (1) und (7)

$$f_0^{2n+1}\left(a+\frac{2n+1}{2}\omega\right) = \omega^{2n+1} f^{2n+1}(a) + A_1^{(2n+1)}\omega^{2n+2} f^{2n+2}(a) + \\ + A_2^{(2n+1)}\omega^{2n+3} f^{2n+3}(a) + \ldots,$$

$$f_0^{2n+1}\left(a-\frac{2n+1}{2}\omega\right) = \omega^{2n+1} f^{2n+1}(a) + B_1^{(2n+1)}\omega^{2n+2} f^{2n+2}(a) + \\ + B_2^{(2n+1)}\omega^{2n+3} f^{2n+3}(a) + \ldots$$

Wird in diesen beiden Formeln a gegen $a - n\omega$ *bezw.* $a + n\omega$ vertauscht, erhalten wir

$$\begin{aligned} f_0^{2n+1}(a+\tfrac{1}{2}\omega) = {} & \omega^{2n+1} f^{2n+1}(a-n\omega) + \\ & + A_1^{(2n+1)}\omega^{2n+2} f^{2n+2}(a-n\omega) + \\ & + A_2^{(2n+1)}\omega^{2n+3} f^{2n+3}(a-n\omega) + \\ & + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0^{2n+1}(a-\tfrac{1}{2}\omega) = {} & \omega^{2n+1} f^{2n+1}(a+n\omega) + \\ & + B_1^{(2n+1)}\omega^{2n+2} f^{2n+2}(a+n\omega) + \\ & + B_2^{(2n+1)}\omega^{2n+3} f^{2n+3}(a+n\omega) + \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Werden die rechten Seiten dieser beiden Formeln nach den Potenzen von ω entwickelt, so erhält man, nachdem man die Reihen nach den Potenzen von ω geordnet hat

$$\begin{aligned} f_0^{2n+1}(a+\tfrac{1}{2}\omega) = {} & \omega^{2n+1} f^{2n+1}(a) + \\ & + \omega^{2n+2} f^{2n+2}(a)\left[A_1^{(2n+1)} - n\right] + \\ & + \omega^{2n+3} f^{2n+3}(a)\left[A_2^{(2n+1)} - nA_1^{(2n+1)} + \frac{n^2}{\underline{|2}}\right] + \\ & + \omega^{2n+4} f^{2n+4}(a)\left[A_3^{(2n+1)} - nA_2^{(2n+1)} + \frac{n^2}{\underline{|2}}A_1^{(2n+1)} - \frac{n^3}{\underline{|3}}\right] + \\ & + \ldots, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_0^{2n+1}(a - \tfrac{1}{2}\omega) = \omega^{2n+1} f^{2n+1}(a) + \\
&+ \omega^{2n+2} f^{2n+2}(a)\left[B_1^{(2n+1)} + n\right] + \\
&+ \omega^{2n+3} f^{2n+3}(a)\left[B_2^{(2n+1)} + n B_1^{(2n+1)} + \frac{n^2}{\underline{|2}}\right] + \\
&+ \omega^{2n+4} f^{2n+4}(a)\left[B_3^{(2n+1)} + n B_2^{(2n+1)} + \frac{n^2}{\underline{|2}} B_1^{(2n+1)} + \frac{n^3}{\underline{|3}}\right] + \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

Aus dem Differenzschema findet man, dass

$$f_0^{2n+1}(a + \tfrac{1}{2}\omega) - f_0^{2n+1}(a - \tfrac{1}{2}\omega) = f_0^{2n+2}(a)$$

ist.

Führen wir weiter die Bezeichnung

$$\tfrac{1}{2}\left[f_0^{2n+1}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + f_0^{2n+1}(a - \tfrac{1}{2}\omega)\right] = f_{1/2}^{2n+1}(a) \tag{11}$$

ein, und bemerken, dass nach (6) und (9)

$$A_1^{(2n+1)} - n = \tfrac{1}{2} = -\left[B_1^{(2n+1)} + n\right],$$

$$
\begin{aligned}
A_2^{(2n+1)} - n A_1^{(2n+1)} + \frac{n^2}{\underline{|2}} = \frac{n+2}{12} &= \\
&= B_2^{(2n+1)} + n B_1^{(2n+1)} + \frac{n^2}{\underline{|2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3^{(2n+1)} - n A_2^{(2n+1)} + \frac{n^2}{\underline{|2}} A_1^{(2n+1)} - \frac{n^3}{\underline{|3}} = \frac{n+1}{24} &= \\
&= -\left[B_3^{(2n+1)} + n B_2^{(2n+1)} + \frac{n^2}{\underline{|2}} B_1^{(2n+1)} + \frac{n^3}{\underline{|3}}\right],
\end{aligned}
$$

u. s. w.,

so erhalten wir durch Addition und Subtraktion, und, indem wir n gegen $n-1$ vertauschen

$$(12)\quad \begin{cases} f_{1/2}^{(2n-1)}(a) = \omega^{2n-1} f^{2n-1}(a) + C_1^{(n)} \omega^{2n+1} f^{2n+1}(a) + \\ \qquad + C_2^{(n)} \omega^{2n+3} f^{2n+3}(a) + \dots, \\ f_0^{2n}\ (a) = \omega^{2n}\ f^{2n}\ (a) + D_1^{(n)} \omega^{2n+2} f^{2n+2}(a) + \\ \qquad + D_2^{(n)} \omega^{2n+4} f^{2n+4}(a) + \dots, \end{cases}$$

wo

$$C_1^{(n)} = \frac{n+1}{12},$$

$$D_1^{(n)} = \frac{n}{12}.$$

Es ist hier stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Relationen

$$(13)\quad \begin{cases} A_{2i+1}^{(n)} = -\, B_{2i+1}^{(n)} \\ A_{2i}^{(n)} = B_{2i}^{(n)} \end{cases}$$

für *alle* i ihre Gültigkeit haben, obgleich sie oben nur für einige Werthe von i bewiesen worden sind. Man kann indessen leicht die allgemeine Gültigkeit dieser Relationen darlegen. Führt man nämlich eine Hilfsfunction $\varphi_n(y)$ durch folgende Relation ein:

$$(14)\qquad \varphi_n(y) = (e^y - 1)^n = y^n + a_1^{(n)} y^{n+1} + a_2^{(n)} y^{n+2} + \dots,$$

so lässt sich leicht beweisen, dass die Coefficienten $a_i^{(n)}$ in der Entwickelung dieser Function nach Potenzen von y mit den Coefficienten $A_i^{(n)}$ übereinstimmen. Um dies darzulegen, bemerken wir zuerst, dass

$$\varphi_{n+1}(y) = (e^y - 1)\,\varphi_n(y),$$

aus welcher Gleichung man dieselben Recursionsformeln für die Coefficienten $a_i^{(n)}$ ableitet, welche in (5) für die Coefficienten $A_i^{(n)}$ erhalten wurden. Da weiter

$$a_1^{(1)} = \frac{1}{\underline{|2}}, \qquad a_2^{(1)} = \frac{1}{\underline{|3}}, \qquad a_3^{(1)} = \frac{1}{\underline{|4}}, \quad \text{u. s. w.},$$

so hat man offenbar allgemein

(14*) $$a_i^{(n)} = A_i^{(n)}.$$

Führen wir eine neue Hilfsfunction

(15) $$\psi_n(y) = (1 - e^{-y})^n = y^n + b_1^{(n)} y^{n+1} + b_2^{(n)} y^{n+2} + \ldots$$

ein, so zeigt sich, dass

(15*) $$b_i^{(n)} = B_i^{(n)},$$

und da offenbar

$$\psi_n(-y) = (-1)^n \varphi_n(y),$$

so sind hiermit die Relationen (13) allgemein bewiesen.

Die Hilfsfunctionen $\varphi_n(y)$ und $\psi_n(y)$ werden übrigens mit grossem Vortheile benutzt, um verschiedene Eigenschaften der Coefficienten $A_i^{(n)}$ und $B_i^{(n)}$ abzuleiten. Im Besonderen können die Umkehrungen der Reihen (1) und (10), mit welchen wir uns später beschäftigen wollen, leicht mit Hilfe dieser Functionen erhalten werden.

Wir haben oben die Differenzen $f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\omega\right)$, für $n = 1, 2, 3, \ldots$, und $f_0^n\left(a - \frac{n}{2}\omega\right)$, für $n = 1, 2, 3, \ldots$, als die adjungirten Differenzen der Function $f(a)$ bezeichnet. Wir können offenbar auch die zunächst durch (12) gegebenen Differenzen als adjungirte Differenzen betrachten und gelangen somit zu den folgenden vier *Reihen von adjungirten Differenzen der Function* $f(a)$

$$f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\omega\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$f_0^n\left(a - \frac{n}{2}\omega\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$f_{1/2}^{2n-1}(a) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$f_0^{2n}(a) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Eine solche Reihe adjungirter Differenzen hat die Eigenschaft, *dass man mit ihrer Hilfe die Ableitungen der Function* $f(a)$ *ohne*

Hinzunahme anderer Differenzen ausdrücken kann. Die adjungirten Differenzen derselben Reihe befinden sich in dem Differenzschema sämmtlich auf einer geraden Linie, die durch die Function $f(a)$ hindurchgeht.

In Bezug auf die adjungirten Differenzen

$$f^{n}_{1/2}(a)$$

ist zu bemerken, dass sie nicht in dem Differenzschema direct vorkommen, sondern nach (11) das arithmetische Mittel zwischen zwei benachbarten Differenzen sind.

Die Darstellung der Ableitungen von $f(a)$ durch die adjungirten Differenzen geschieht durch Umkehrung von (1), (7) und (12). Indem man nach einander in (1) n gegen $n+1$, $n+2$ u. s. w. vertauscht, erhält man

$$f^{n}_{0}\left(a+\frac{n}{2}\,\omega\right)=\omega^{n}f^{n}(a)+A^{(n)}_{1}\,\omega^{n+1}f^{n+1}(a)+A^{(n)}_{2}\,\omega^{n+2}f^{n+2}(a)+ + A^{(n)}_{3}\,\omega^{n+3}f^{n+3}(a)+\ldots$$

$$f^{n+1}_{0}\left(a+\frac{n+1}{2}\,\omega\right)=\omega^{n+1}f^{n+1}(a)+A^{(n+1)}_{1}\omega^{n+2}f^{n+2}(a)+ + A^{(n+1)}_{2}\omega^{n+3}f^{n+3}(a)+\ldots$$

$$f^{n+2}_{0}\left(a+\frac{n+2}{2}\,\omega\right)=\omega^{n+2}f^{n+2}(a)+ + A^{(n+2)}_{1}\omega^{n+3}f^{n+3}(a)+\ldots$$

$$f^{n+3}_{0}\left(a+\frac{n+3}{2}\,\omega\right)=\omega^{n+3}f^{n+3}(a)+\ldots$$

. . . .

Bestimmen wir gewisse Zahlen $\alpha^{(n)}_{1}$, $\alpha^{(n)}_{2}$, $\alpha^{(n)}_{3}$ u. s. w. so, dass

$$(16^{*})\quad\left\{\begin{aligned} A^{(n)}_{1}+\alpha^{(n)}_{1}&=0\\ A^{(n)}_{2}+\alpha^{(n)}_{1}A^{(n+1)}_{1}+\alpha^{(n)}_{2}&=0\\ A^{(n)}_{3}+\alpha^{(n)}_{1}A^{(n+1)}_{2}+\alpha^{(n)}_{2}A^{(n+2)}_{1}+\alpha^{(n)}_{3}&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}\right.$$

so erhalten wir

$$(16)\quad \begin{cases} \omega^n f^n(a) = f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\omega\right) + \alpha_1^{(n)} f_0^{n+1}\left(a + \frac{n+1}{2}\omega\right) + \\ \qquad + \alpha_2^{(n)} f_0^{n+2}\left(a + \frac{n+2}{2}\omega\right) + \ldots, \end{cases}$$

durch welche Reihe die Differentialquotienten von $f(a)$ durch die adjungirten Differenzen vom Typus

$$f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\omega\right)$$

ausgedrückt werden.

Die Werthe der Coefficienten $\alpha_i^{(n)}$ können aus (16*) erhalten werden, oder bequemer unter Anwendung der Hilfsfunction $\varphi_n(y)$.

Aus der Formel

$$\varphi_n = y^n + A_1^{(n)} y^{n+1} + A_2^{(n)} y^{n+2} + \ldots$$

erhält man

$$y^n = \varphi_n + \alpha_1^{(n)} \varphi_{n+1} + \alpha_2^{(n)} \varphi_{n+2} + \ldots,$$

wo die $\alpha_i^{(n)}$ durch (16*) bestimmt sind. Da $\varphi_n = \varphi_1^n$, so können wir diese Formel auch in folgender Form schreiben

$$y^n = \varphi_1^n + \alpha_1^{(n)} \varphi_1^{n+1} + \alpha_2^{(n)} \varphi_1^{n+2} + \ldots,$$

und die Aufgabe ist somit, y^n nach Potenzen von φ_1 zu entwickeln. Nach (14) ist aber

$$\varphi_1 = e^y - 1,$$

und also

$$y = \log(1 + \varphi_1) = \varphi_1 - \tfrac{1}{2}\varphi_1^2 + \tfrac{1}{3}\varphi_1^3 - \ldots,$$

woraus

$$y^n = (\varphi_1 - \tfrac{1}{2}\varphi_1^2 + \tfrac{1}{3}\varphi_1^3 - \ldots)^n$$

$$= \varphi_1^n - \frac{n}{2}\varphi_1^{n+1} + \frac{n(3n+5)}{24}\varphi_1^{n+2} - \frac{n(n+2)(n+3)}{48}\varphi_1^{n+3} + \ldots$$

Es ist also

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha_1^{(n)} = -\dfrac{n}{2}, \\ \alpha_2^{(n)} = \dfrac{n(3n+5)}{24}, \\ \alpha_3^{(n)} = -\dfrac{n(n+2)(n+3)}{48}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Um die Differentialquotienten durch die adjungirten Differenzen vom Typus

$$f_0{}^n\left(a - \frac{n}{2}\,\omega\right)$$

auszudrücken, bedienen wir uns der Hilfsfunction ψ_n

$$\psi_n = \left(1 - e^{-y}\right)^n = y^n + B_1^{(n)} y^{n+1} + B_2^{(n)} y^{n+2} + \ldots$$

Diese giebt

$$y = -\log(1 - \psi_1) = \psi_1 + \tfrac{1}{2}\psi_1{}^2 + \tfrac{1}{3}\psi_1{}^3 + \ldots,$$

mithin

$$y^n = \psi_1^n (1 + \tfrac{1}{2}\psi_1 + \tfrac{1}{3}\psi_1{}^2 + \ldots)^n =$$

$$= \psi_1^n + \frac{n}{2}\psi_1^{n+1} + \frac{n(3n+5)}{24}\psi_1^{n+2} + \frac{n(n+2)(n+3)}{48}\psi_1^{n+3} + \ldots$$

Setzen wir also

$$\omega^n f^n(a) = f_0^n\left(a - \frac{n}{2}\,\omega\right) + \beta_1^{(n)} f_0^{n+1}\left(a - \frac{n+1}{2}\,\omega\right)$$

$$+ \beta_2^{(n)} f_0^{n+2}\left(a - \frac{n+2}{2}\,\omega\right) + \ldots,$$

so ist

$$(18)\quad \begin{cases} \beta_1^{(n)} = \dfrac{n}{2}, \\ \beta_2^{(n)} = \dfrac{n(3n+5)}{24}, \\ \beta_3^{(n)} = \dfrac{n(n+2)(n+3)}{48}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Was endlich die adjungirten Differenzen von der Form

$$f_{1/2}^{2n-1}(a) \quad \text{und} \quad f_0^{2n}(a)$$

betrifft, so kann man auch für sie ähnliche Hilfsfunctionen aufstellen. Aus der Definition für diese Differenzen folgt, dass zwischen denselben folgende Relationen bestehen

$$(19) \quad \begin{cases} f_{1/2}^{2n+1}(a) = f_{1/2}^{2n-1}(a+\omega) - 2 f_{1/2}^{2n-1}(a) + f_{1/2}^{2n-1}(a-\omega), \\ f_0^{2n+2}(a) = f_0^{2n}(a+\omega) - 2 f_0^{2n}(a) + f_0^{2n}(a-\omega). \end{cases}$$

Setzen wir in diese Ausdrücke die Reihen (12) ein, so bekommen wir, wenn wir nach Potenzen von ω entwickeln, für $C_i^{(n)}$ und $D_i^{(n)}$ folgende Recursionsformeln:

$$(20) \quad \begin{cases} C_1^{(n+1)} - C_1^{(n)} = \dfrac{2}{\underline{|4}}, \\ C_2^{(n+1)} - C_2^{(n)} = 2\left(\dfrac{1}{\underline{|6}} + \dfrac{C_1^{(n)}}{\underline{|4}}\right), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

$$(20^*) \quad \begin{cases} D_1^{(n+1)} - D_1^{(n)} = \dfrac{2}{\underline{|4}}, \\ D_2^{(n+1)} - D_2^{(n)} = 2\left(\dfrac{1}{\underline{|6}} + \dfrac{D_1^{(n)}}{\underline{|4}}\right), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Zur vollständigen Bestimmung von $C_i^{(n)}$ und $D_i^{(n)}$ brauchen wir noch die Werthe dieser Coefficienten für $n = 1$. Es ist aber

$$\begin{aligned} f^{1}_{1/2}(a) &= \tfrac{1}{2}[f_0^{1}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + f_0^{1}(a - \tfrac{1}{2}\omega)] \\ &= \tfrac{1}{2}[f(a+\omega) - f(a-\omega)] \\ &= \frac{\omega}{\underline{|1}} f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{\omega^3}{\underline{|3}} f^{\mathrm{III}}(a) + \frac{\omega^5}{\underline{|5}} f^{\mathrm{V}}(a) + \dots, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_0^{\rm II}(a) &= f_0^{\rm I}(a + \tfrac{1}{2}\omega) - f_0^{\rm I}(a - \tfrac{1}{2}\omega) \\ &= f(a+\omega) + f(a-\omega) - 2f(a) \\ &= \omega^2 f^{\rm II}(a) + \frac{2\omega^4}{\lfloor 4}f^{\rm IV}(a) + \frac{2\omega^6}{\lfloor 6}f^{\rm VI}(a) + \cdots, \end{aligned}$$

und man hat also

$$C_1^{(1)} = \frac{1}{\lfloor 3}, \quad C_2^{(1)} = \frac{1}{\lfloor 5}, \quad C_3^{(1)} = \frac{1}{\lfloor 7}, \ldots,$$

$$D_1^{(1)} = \frac{2}{\lfloor 4}, \quad D_2^{(1)} = \frac{2}{\lfloor 6}, \quad D_3^{(1)} = \frac{2}{\lfloor 8}, \ldots,$$

und hiermit sind die Werthe sämmtlicher Coefficienten $C_i^{(n)}$ und $D_i^{(n)}$ völlig bestimmt. Diese Werthe lassen sich natürlich leicht aus den obigen Recursionsformeln ableiten. Indessen geschieht diese Bestimmung noch leichter, wenn man sich gewisser Hilfsfunctionen bedient. Setzt man

$$G_n(y) = H(y)(e^y + e^{-y} - 2)^{n-1}, \tag{21}$$

wo unter $H(y)$ irgend eine von n unabhängige Function von y verstanden wird, die mit y verschwindet, und die entweder gerade oder ungerade ist, so dass

$$G_n(y) = y^{2n+s} + h_1^{(n)} y^{2n+s+2} + h_2^{(n)} y^{2n+s+4} + \ldots,$$

wo s eine ganze Zahl bezeichnet, so bekommt man für die Coefficienten $h_i^{(n)}$ die Recursionsformeln

$$h_1^{(n+1)} - h_1^{(n)} = \frac{2}{\lfloor 4},$$

$$h_2^{(n+1)} - h_2^{(n)} = 2\left(\frac{1}{\lfloor 6} + \frac{h_1^{(n)}}{\lfloor 4}\right)$$

u. s. w.,

also Relationen von der Form (20) und (20*). Es ist also ersicht-

lich, dass wir die Function $H(y)$ so bestimmen können, dass die Coefficienten $h_i^{(n)}$ entweder mit den Coefficienten $C_i^{(n)}$ oder mit $D_i^{(n)}$ zusammenfallen.

Setzt man

$$H_1(y) = y + C_1^{(1)} y^3 + C_2^{(1)} y^5 + \dots,$$

so wird offenbar

$$G_n(y) = H_1(y)(e^y + e^{-y} - 2)^{n-1} = y^{2n-1} + C_1^{(n)} y^{2n+1} + C_2^{(n)} y^{2n+3} + \dots,$$

und führt man eine Function $H_2(y)$, durch die folgende Gleichung definirt, ein

$$H_2(y) = y^2 + D_1^{(1)} y^4 + D_2^{(1)} y^6 + \dots,$$

so wird

$$H_2(y)\,(e^y + e^{-y} - 2)^{n-1} = y^{2n} + D_1^{(n)} y^{2n+2} + D_2^{(n)} y^{2n+4} + \dots$$

Aus den Werthen der $C_i^{(1)}$ und $D_i^{(1)}$ findet man, dass

$$H_1(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

$$H_2(y) = e^y + e^{-y} - 2.$$

Die beiden Hilfsfunctionen, die wir hier einzuführen haben, sind also die folgenden, die wir mit $\tau(y)$ und $\chi(y)$ bezeichnen, nämlich

$$(22)\qquad \begin{cases} \tau_n(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})(e^y + e^{-y} - 2)^{n-1}, \\ \chi_n(y) = (e^y + e^{-y} - 2)^n, \end{cases}$$

und man hat

$$\tau_n(y) = y^{2n-1} + C_1^{(n)} y^{2n+1} + C_2^{(n)} y^{2n+3} + \dots,$$

$$\chi_n(y) = y^{2n} + D_1^{(n)} y^{2n+2} + D_2^{(n)} y^{2n+4} + \dots.$$

Da

$$\tau_n = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\chi_{n-1},$$

so kann die Entwickelung von τ_n leicht erhalten werden, nachdem χ_n bekannt ist. Es wird

$$(23)\quad \begin{cases} \tau_n = y^{2n-1} + \frac{n+1}{12} y^{2n+1} + \frac{5n^2+9n-2}{1440} y^{2n+3} + \ldots, \\ \chi_n = y^{2n} \quad + \frac{n}{12} y^{2n+2} + \frac{5n^2-n}{1440} y^{2n+4} + \ldots, \end{cases}$$

so dass

$$(23^*)\quad \begin{cases} C_1^{(n)} = \frac{n+1}{12}, \qquad D_1^{(n)} = \frac{n}{12}, \\ C_2^{(n)} = \frac{5n^2+9n-2}{1440}, \qquad D_2^{(n)} = \frac{5n^2-n}{1440}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Will man die Differentialquotienten durch die Differenzen ausdrücken, muss man die Reihen (23) umkehren, und somit y durch $\tau_n, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \ldots$ und $\chi_n, \chi_{n+1}, \chi_{n+2}, \ldots$ ausdrücken. Dies kann durch directe Umkehrung geschehen, oder indem man sich der analytischen Form der Hilfsfunctionen bedient, um die Transformation zu erleichtern. Zu dem Zweck bemerken wir, dass

$$(24)\qquad \chi_n = \chi_1^n,$$

und folglich braucht man nur die Entwickelung von y nach Potenzen von χ_1 aufzusuchen, um die betreffende Umkehrung zu erhalten. Es ist aber

$$\chi_1 = e^y + e^{-y} - 2 = \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{-\frac{y}{2}}\right)^2$$

und also

$$(25)\qquad y = 2\log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right),$$

wo

$$2z = \sqrt{\chi_1}.$$

Mit Hilfe der bekannten Entwickelung der rechten Seite von (25) wird y durch die Potenzen von $\sqrt{\chi_1}$ ausgedrückt und hieraus erhält man zuletzt

$$y^{2n} = \chi_1^n + \delta_1 \chi_1^{n+1} + \delta_2 \chi_1^{n+2} + \ldots,$$

oder, was auf dasselbe herauskommt,

$$y^{2n} = \chi_n + \delta_1 \chi_{n+1} + \delta_2 \chi_{n+2} + \dots,$$

und also auch

$$\omega^{2n} f^{2n}(a) = f_0^{2n}(a) + \delta_1 f_0^{2n+2}(a) + \delta_2 f_0^{2n+4}(a) + \dots$$

Die Aufsuchung der entsprechenden Entwickelung der Differentialquotienten ungerader Ordnung durch die adjungirten Functionen von der Form

$$f_{1/2}^{2n+1}(a)$$

würde sich in dieser Weise nicht so leicht ergeben, und es ist vorzuziehen, die Reihe (23) für τ_n direct umzukehren. Wir erhalten somit

$$y^{2n-1} = \tau_n - \frac{n+1}{12}\tau_{n+1} + \frac{5n^2+21n+22}{1440}\tau_{n+2} + \dots,$$

und die Umkehrung der Reihe für χ_n giebt

$$y^{2n} = \chi_n - \frac{n}{12}\chi_{n+1} + \frac{5n^2+11n}{1440}\chi_{n+2} - \dots$$

Auf die Differentialquotienten und die Differenzen übertragen, lauten diese Relationen

$$\omega^{2n-1} f^{2n-1}(a) = f_{1/2}^{2n-1}(a) + \gamma_1^{(n)} f_{1/2}^{2n+1}(a) + \gamma_2^{(n)} f_{1/2}^{2n+3}(a) + \dots,$$

$$\omega^{2n} f^{2n}(a) = f_0^{2n}(a) + \delta_1^{(n)} f_0^{2n+2}(a) + \delta_2^{(n)} f_0^{2n+4}(a) + \dots,$$

wo

$$\gamma_1^{(n)} = -\frac{n+1}{12}, \qquad \delta_1^{(n)} = -\frac{n}{12},$$

$$\gamma_2^{(n)} = \frac{5n^2+21n+22}{1440}, \qquad \delta_2^{(n)} = \frac{5n^2+11n}{1440},$$

. . . .

Stellen wir die Resultate zusammen, haben wir also folgende

Ausdrücke für die Differentialquotienten durch die adjungirten Differenzen erhalten:

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \omega^n f^n(a) = f_0^n\left(a + \frac{n}{2}\,\omega\right) - {} & \frac{n}{2}\, f_0^{n+1}\left(a + \frac{n+1}{2}\,\omega\right) + \\ + {} & \frac{n(3n+5)}{24}\, f_0^{n+2}\left(a + \frac{n+2}{2}\,\omega\right) - \\ - {} & \frac{n(n+2)(n+3)}{48}\, f_0^{n+3}\left(a + \frac{n+3}{2}\,\omega\right) + \\ + {} & \dots \end{aligned}\right.$$

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \omega^n f^n(a) = f_0^n\left(a - \frac{n}{2}\,\omega\right) + {} & \frac{n}{2}\, f_0^{n+1}\left(a - \frac{n+1}{2}\,\omega\right) + \\ + {} & \frac{n(3n+5)}{24}\, f_0^{n+2}\left(a - \frac{n+2}{2}\,\omega\right) + \\ + {} & \frac{n(n+2)(n+3)}{48}\, f_0^{n+3}\left(a - \frac{n+3}{2}\,\omega\right) + \\ + {} & \dots \end{aligned}\right.$$

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \omega^{2n-1} f^{2n-1}(a) = f_{1/2}^{2n-1}(a) - {} & \frac{n+1}{12}\, f_{1/2}^{2n+1}(a) + \\ + {} & \frac{5n^2+21n+22}{1440}\, f_{1/2}^{2n+3}(a) - \\ - {} & \dots \end{aligned}\right.$$

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \omega^{2n} f^{2n}(a) = f_0^{2n}(a) - {} & \frac{n}{12}\, f_0^{2n+2}(a) + \\ + {} & \frac{5n^2+11n}{1440}\, f_0^{2n+4}(a) - \\ - {} & \dots \end{aligned}\right.$$

Indem wir die Differenzen sechster und höherer Ordnung vernachlässigen, erhalten wir hieraus für $n = 1,\ 2,\ 3$ u. s. w.

$$
\text{I}\left\{\begin{aligned}
\omega\, f^{\mathrm{I}}(a) &= f_0^{\mathrm{I}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2} f_0^{\mathrm{II}}(a+\omega) + \tfrac{1}{3} f_0^{\mathrm{III}}(a+\tfrac{3}{2}\omega) - \\
&\qquad - \tfrac{1}{4} f_0^{\mathrm{IV}}(a+2\omega) + \tfrac{1}{5} f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{5}{2}\omega) - \dots \\
\omega^2 f^{\mathrm{II}}(a) &= f_0^{\mathrm{II}}(a+\omega) - f_0^{\mathrm{III}}(a+\tfrac{3}{2}\omega) + \tfrac{11}{12} f_0^{\mathrm{IV}}(a+2\omega) - \\
&\qquad - \tfrac{5}{6} f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{5}{2}\omega) + \dots \\
\omega^3 f^{\mathrm{III}}(a) &= f_0^{\mathrm{III}}(a+\tfrac{3}{2}\omega) - \tfrac{3}{2} f_0^{\mathrm{IV}}(a+2\omega) + \tfrac{7}{4} f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{5}{2}\omega) - \dots \\
\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a) &= f_0^{\mathrm{IV}}(a+2\omega) - 2 f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{5}{2}\omega) - \dots \\
\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a) &= f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{5}{2}\omega) - \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{II}\left\{\begin{aligned}
\omega\, f^{\mathrm{I}}(a) &= f_0^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{2} f_0^{\mathrm{II}}(a-\omega) + \tfrac{1}{3} f_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \\
&\qquad + \tfrac{1}{4} f_0^{\mathrm{IV}}(a-2\omega) + \tfrac{1}{5} f_0^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{5}{2}\omega) + \dots \\
\omega^2 f^{\mathrm{II}}(a) &= f_0^{\mathrm{II}}(a-\omega) + f_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \tfrac{11}{12} f_0^{\mathrm{IV}}(a-2\omega) + \\
&\qquad + \tfrac{5}{6} f_0^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{5}{2}\omega) + \dots \\
\omega^3 f^{\mathrm{III}}(a) &= f_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \tfrac{3}{2} f_0^{\mathrm{IV}}(a-2\omega) + \tfrac{7}{4} f_0^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{5}{2}\omega) + \dots \\
\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a) &= f_0^{\mathrm{IV}}(a-2\omega) + 2 f_0^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{5}{2}\omega) + \dots \\
\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a) &= f_0^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{5}{2}\omega) + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{III}\left\{\begin{aligned}
\omega\, f^{\mathrm{I}}(a) &= f_{1/2}^{\mathrm{I}}(a) - \tfrac{1}{6} f_{1/2}^{\mathrm{III}}(a) + \tfrac{1}{30} f_{1/2}^{\mathrm{V}}(a) - \dots \\
\omega^3 f^{\mathrm{III}}(a) &= f_{1/2}^{\mathrm{III}}(a) - \tfrac{1}{4} f_{1/2}^{\mathrm{V}}(a) + \dots \\
\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a) &= f_{1/2}^{\mathrm{V}}(a) - \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{IV}\left\{\begin{aligned}
\omega^2 f^{\mathrm{II}}(a) &= f_0^{\mathrm{II}}(a) - \tfrac{1}{12} f_0^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{90} f^{\mathrm{VI}}(a) - \dots \\
\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a) &= f_0^{\mathrm{IV}}(a) - \tfrac{1}{6} f^{\mathrm{VI}}(a) + \dots \\
\omega^6 f^{\mathrm{VI}}(a) &= f_0^{\mathrm{VI}}(a) - \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.
$$

Die beiden letzten Formelgruppen enthalten Differenzen mit nur ungeraden bez. mit nur geraden Ordnungszahlen, wogegen in

den zwei ersten Gruppen Differenzen aller Ordnungen vorkommen. Die Formeln III und IV sind deswegen stärker convergent und müssen daher bei numerischen Rechnungen vorgezogen werden, so oft nämlich diese Formeln überhaupt zur Anwendung kommen können. Es kommt indessen öfter vor, dass die in III und IV vorkommenden Differenzen nicht bekannt sind, obgleich die Differenzen rechter Hand in I oder in II gegeben sind, und dann muss man sich der letztgenannten Formeln bedienen. Wir werden in den folgenden Paragraphen Gelegenheit finden, diese Verhältnisse näher zu beleuchten.

§ 4. Formeln für mechanische Quadratur.

Nachdem wir die Relationen zwischen den Differentialquotienten und den Differenzen abgeleitet haben, ist es nun unsere Aufgabe in der Formel (5) § 2 für numerische Quadratur die daselbst vorkommenden Differentialquotienten gegen Differenzen zu vertauschen, um zuletzt zu den definitiven Formeln für numerische Quadratur zu gelangen. Da in der Euler'schen Reihe (in der Form (5) § 2) nur die Differentialquotienten ungerader Ordnung vorkommen, so erhalten wir drei verschiedene Quadraturformeln, je nachdem man das Formelsystem I, II oder III im vorigen Paragraphen benutzt.

Die Euler'sche Formel lautete:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \int_a^{a+s\omega} \lambda(x)\,dx = {} & \omega \sum_{r=0}^{s-1} \lambda(a + r\omega) + \tfrac{1}{2}\omega\,[\lambda(a+s\omega) - \lambda(a)] \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} A_{2i}\,\omega^{2i}\,[\lambda^{2i-1}(a+s\omega) - \lambda^{2i-1}(a)] \\ & - R_{2n}^{(s)}, \end{aligned}\right.$$

wo

$$(1^*)\quad R_{2n}^{(s)} = A_{2n}\,\omega^{2n+1} \sum_{r=0}^{s-1} \lambda^{2n}(a + \theta_r\omega + r\omega).$$

Setzen wir hier nach § 3 (16) die Reihen

$$\begin{aligned}\omega^{2i-1}\lambda^{2i-1}(a+s\omega) = \quad & \lambda_0^{2i-1}\left(a+s\omega+\frac{2i-1}{2}\omega\right)+\\ &+\alpha_1^{(2i-1)}\lambda_0^{2i}\left(a+s\omega+\frac{2i}{2}\omega\right)+\\ &+\alpha_2^{(2i-1)}\lambda_0^{2i+1}\left(a+s\omega+\frac{2i+1}{2}\omega\right)+\\ &+\dots\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\omega^{2i-1}\lambda^{2i-1}(a) = \quad & \lambda_0^{2i-1}\left(a+\frac{2i-1}{2}\omega\right)+\\ &+\alpha_1^{(2i-1)}\lambda_0^{2i}\left(a+\frac{2i}{2}\omega\right)+\\ &+\alpha_2^{(2i-1)}\lambda_0^{2i+1}\left(a+\frac{2i+1}{2}\omega\right)+\\ &+\dots\end{aligned}$$

ein, so bekommen wir

$$\int_a^{a+s\omega}\lambda(x)\,dx = \omega\sum_{r=0}^{s-1}\lambda(a+r\omega)+\tfrac{1}{2}\omega\left[\lambda(a+s\omega)-\lambda(a)\right]$$

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&-\omega\sum_{i=1}^{n-1}A_{2i}\left[\lambda_0^{2i-1}\left(a+s\omega+\frac{2i-1}{2}\omega\right)-\lambda_0^{2i-1}\left(a+\frac{2i-1}{2}\omega\right)\right]\\ &-\omega\sum_{i=1}^{n-1}A_{2i}\alpha_1^{(2i-1)}\left[\lambda_0^{2i}\left(a+s\omega+\frac{2i}{2}\omega\right)-\lambda_0^{2i}\left(a+\frac{2i}{2}\omega\right)\right]\\ &-\omega\sum_{i=1}^{n-1}A_{2i}\alpha_2^{(2i-1)}\left[\lambda_0^{2i+1}\left(a+s\omega+\frac{2i+1}{2}\omega\right)-\lambda_0^{2i+1}\left(a+\frac{2i+1}{2}\omega\right)\right]\\ &-\dots\\ &-R_{2n}^{(s)},\end{aligned}\right.$$

wo man auch das Restglied durch die Differenzen ausdrücken kann.

Führen wir die numerischen Werthe der Coefficienten A_{2i} in (1) ein, so ist

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\int_a^{a+s\omega}\lambda(x)\,dx = \omega\sum_{r=1}^{s-1}\lambda(a+r\omega) + \tfrac{1}{2}\omega\,[\lambda(a+s\omega)-\lambda(a)] & - \\ -\ \frac{1}{12}\ \omega^2\,[\lambda^{\mathrm{I}}\ (a+s\omega)-\lambda^{\mathrm{I}}\ (a)] & + \\ +\ \frac{1}{720}\ \omega^4\,[\lambda^{\mathrm{III}}\,(a+s\omega)-\lambda^{\mathrm{III}}\,(a)] & - \\ -\ \frac{1}{30\,240}\ \omega^6\,[\lambda^{\mathrm{V}}\ (a+s\omega)-\lambda^{\mathrm{V}}\ (a)] & + \\ +\ \frac{1}{1\,209\,600}\ \omega^8\,[\lambda^{\mathrm{VII}}\,(a+s\omega)-\lambda^{\mathrm{VII}}\,(a)] & - \\ -\ \ldots & \end{aligned}\right.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$(4)\qquad T_s = \omega\sum_{r=0}^{s-1}\lambda(a+r\omega) + \tfrac{1}{2}\omega\,[\lambda(a+s\omega)-\lambda(a)],$$

so dass T_s also den gewöhnlichen Näherungswerth eines bestimmten Integrals bezeichnet.

Setzen wir die Werthe § 3 (I) in (3) ein, so bekommen wir

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\int_a^{a+s\omega}\lambda(x)\,dx = T_s -\ & \frac{\omega}{12}\ [\lambda_0^{\mathrm{I}}\ (a+s\omega+\tfrac{1}{2}\omega)-\lambda_0^{\mathrm{I}}\ (a+\tfrac{1}{2}\omega)] + \\ +\ & \frac{\omega}{24}\ [\lambda_0^{\mathrm{II}}\,(a+s\omega+\ \omega)-\lambda_0^{\mathrm{II}}\,(a+\ \omega)] - \\ -\ & \frac{19\,\omega}{720}\,[\lambda_0^{\mathrm{III}}(a+s\omega+\tfrac{3}{2}\omega)-\lambda_0^{\mathrm{III}}(a+\tfrac{3}{2}\omega)] + \\ +\ & \frac{3\,\omega}{160}\,[\lambda_0^{\mathrm{IV}}(a+s\omega+2\,\omega)-\lambda_0^{\mathrm{IV}}(a+2\,\omega)] - \\ -\ & \frac{863\,\omega}{60\,480}\,[\lambda_0^{\mathrm{V}}\ (a+s\omega+\tfrac{5}{2}\omega)-\lambda_0^{\mathrm{V}}\ (a+\tfrac{5}{2}\omega)] + \\ +\ & \ldots\end{aligned}\right.$$

Unter Anwendung des Formelsystems II § 3 bekommt man

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_a^{a+s\omega} \lambda(x)\,dx = T_s &- \frac{\omega}{12}\left[\lambda_0^{\mathrm{I}}\left(a+s\omega-\tfrac{1}{2}\omega\right)-\lambda_0^{\mathrm{I}}\left(a-\tfrac{1}{2}\omega\right)\right]- \\
&- \frac{\omega}{24}\left[\lambda_0^{\mathrm{II}}\left(a+s\omega-\ \omega\right)-\lambda_0^{\mathrm{II}}\left(a-\ \omega\right)\right]- \\
&- \frac{19\,\omega}{720}\left[\lambda_0^{\mathrm{III}}\left(a+s\omega-\tfrac{3}{2}\omega\right)-\lambda_0^{\mathrm{III}}\left(a-\tfrac{3}{2}\omega\right)\right]- \\
&- \frac{3\,\omega}{160}\left[\lambda_0^{\mathrm{IV}}\left(a+s\omega-2\omega\right)-\lambda_0^{\mathrm{IV}}\left(a-2\omega\right)\right]- \\
&- \frac{863\,\omega}{60\,480}\left[\lambda_0^{\mathrm{V}}\left(a+s\omega-\tfrac{5}{2}\omega\right)-\lambda_0^{\mathrm{V}}\left(a-\tfrac{5}{2}\omega\right)\right]- \\
&- \dots
\end{aligned}
\right.
$$

Das System III giebt uns endlich folgende bequeme Integrationsformel

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_a^{a+s\omega} \lambda(x)\,dx = T_s &- \frac{\omega}{12}\left[\lambda^{\mathrm{I}}_{1/2}(a+s\omega)-\lambda^{\mathrm{I}}_{1/2}(a)\right]+ \\
&+ \frac{11}{720}\left[\lambda^{\mathrm{III}}_{1/2}(a+s\omega)-\lambda^{\mathrm{III}}_{1/2}(a)\right]- \\
&- \frac{191}{60\,480}\left[\lambda^{\mathrm{V}}_{1/2}(a+s\omega)-\lambda^{\mathrm{V}}_{1/2}(a)\right]+ \\
&+ \dots
\end{aligned}
\right.
$$

Das Restglied habe ich hier nicht hingeschrieben, da sein genauer Werth nicht aus der hier gemachten Untersuchung hervorgeht. Man bekommt in der That nach (1*) für das Restglied eine unendliche Reihe, deren Werth zuerst untersucht werden muss. Eine derartige Untersuchung liegt aber bis jetzt nicht vor, obgleich eine solche wohl ausführbar wäre. Ohne Zweifel würde eine solche Untersuchung von der allergrössten Bedeutung für den praktischen Rechner sein, und es lässt sich *a priori* erwarten, dass das wichtige Resultat sich ergeben würde, dass, für hinreichend kleine Werthe von ω, der Fehler bei der Anwendung irgend einer von diesen

Formeln kleiner ist als der doppelte Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes, analog wie es der Fall ist, wenn man rechter Seite die Differentialquotienten statt der Differenzen benutzt.

Von besonderem Interesse in astronomischer Hinsicht ist der Fall, wo in den obigen Formeln $s = 1$ gesetzt wird. Indem wir bemerken, dass

$$f_0^{(i)}\left(a + \frac{i}{2}\,\omega + \omega\right) - f_0^{(i)}\left(a + \frac{i}{2}\,\omega\right) = f_0^{(i+1)}\left(a + \frac{i+1}{2}\,\omega\right),$$

und dass T_1 in folgenden verschiedenen Formen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} T_1 &= \omega\,\lambda(a) + \tfrac{1}{2}\,\omega\,[\lambda(a+\omega) - \lambda(a)] = \\ &= \omega\,\lambda(a) + \tfrac{1}{2}\,\omega\,\lambda_0^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}\,\omega) = \\ &= \omega\,\lambda(a+\omega) - \tfrac{1}{2}\,\omega\,\lambda_0^{\mathrm{I}}(a + \tfrac{1}{2}\,\omega) = \\ &= \frac{\omega}{2}\,[\lambda(a+\omega) + \lambda(a)], \end{aligned}$$

so erhalten wir aus (5) für $s = 1$:

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^{a+\omega} \lambda(x)\,dx = \omega\,\lambda(a) &+ \tfrac{1}{2}\,\omega\,\lambda_0^{\mathrm{I}}\,(a + \tfrac{1}{2}\,\omega) - \\ &- \frac{\omega}{12}\,\lambda_0^{\mathrm{II}}\,(a + \omega) + \\ &+ \frac{\omega}{24}\,\lambda_0^{\mathrm{III}}\,(a + \tfrac{3}{2}\,\omega) - \\ &- \frac{19\,\omega}{720}\,\lambda_0^{\mathrm{IV}}\,(a + 2\,\omega) + \\ &+ \frac{3\,\omega}{160}\,\lambda_0^{\mathrm{V}}\,(a + \tfrac{5}{2}\,\omega) - \\ &- \frac{868\,\omega}{60480}\,\lambda_0^{\mathrm{VI}}\,(a + 3\,\omega) + \\ &+ \cdots \end{aligned} \right.$$

und aus (6):

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_a^{a+\omega} \lambda(x)\,dx = \omega\lambda(a+\omega) &- \frac{\omega}{2}\,\lambda_0^{\mathrm{I}}\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \\
&- \frac{\omega}{12}\,\lambda_0^{\mathrm{II}}\,(a) - \\
&- \frac{\omega}{24}\,\lambda_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}\omega) - \\
&- \frac{19\,\omega}{720}\,\lambda_0^{\mathrm{IV}}(a-\omega) - \\
&- \frac{3\,\omega}{160}\,\lambda_0^{\mathrm{V}}\,(a-\tfrac{3}{2}\omega) - \\
&- \frac{863\,\omega}{60480}\,\lambda_0^{\mathrm{VI}}\,(a-2\,\omega) - \\
&- \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Was die Formel (7) betrifft, so lässt sie sich, für $s = 1$, in ähnlicher Weise umformen. Führt man die Bezeichnung

$$
(10)\qquad f_{1/2}^{2i}(a+\tfrac{1}{2}\omega) = \tfrac{1}{2}\,[f_0^{2i}(a+\omega) + f_0^{2i}(a)]
$$

ein, so wird nämlich

$$
f_{1/2}^{2i-1}(a+\omega) - f_{1/2}^{2i-1}(a) = f_{1/2}^{2i}(a+\tfrac{1}{2}\omega),
$$

und aus (7) erhalten wir also für $s = 1$:

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_a^{a+\omega} \lambda(x)\,dx = \quad & \omega\ \ \lambda_{1/2}(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \\
&- \frac{\omega}{12}\,\lambda_{1/2}^{\mathrm{II}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \\
&+ \frac{11\,\omega}{720}\,\lambda_{1/2}^{\mathrm{IV}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \\
&- \frac{191\,\omega}{60480}\,\lambda_{1/2}^{\mathrm{VI}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \\
&+ \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Die Formeln (8), (9) und (11) genügen, um die numerische Berechnung von Integralen bequem auszuführen. Es wird sich aber empfehlen, die Formel (9) gegen eine andere zu vertauschen, die eine andere Reihe von adjungirten Differenzen enthält, nämlich diejenigen Differenzen, welche der Function $\lambda(a)$ adjungirt sind, statt der Differenzen, welche zu der Function $\lambda(a+\omega)$ gehören und die in (9) vorkommen. Aus dem Differenzschema erhält man unmittelbar die folgenden Relationen

$$\begin{aligned}
\lambda\,(a+\omega) &= \lambda(a) + \lambda_0^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}\omega) + \lambda_0^{\mathrm{II}}(a-\omega) + \lambda_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \ldots \\
\lambda_0^{\mathrm{I}}\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= \lambda_0^{\mathrm{I}}(a-\tfrac{1}{2}\omega) + \lambda_0^{\mathrm{II}}(a-\omega) + \lambda_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \ldots \\
\lambda_0^{\mathrm{II}}\,(a) &= \lambda_0^{\mathrm{II}}(a-\omega) + \lambda_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \ldots \\
\lambda_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}\omega) &= \lambda_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w.,

und setzt man diese in (9) ein, so erhält man

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}\lambda(x)\,dx = {} & \lambda\,(a) + \\
& + \frac{1}{2}\,\lambda_0^{\mathrm{I}}\,(a-\tfrac{1}{2}\omega) + \\
& + \frac{5}{12}\,\lambda_0^{\mathrm{II}}\,(a-\omega) + \\
& + \frac{3}{8}\,\lambda_0^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \\
& + \frac{251}{720}\,\lambda_0^{\mathrm{IV}}(a-2\omega) + \\
& + \frac{95}{288}\,\lambda_0^{\mathrm{V}}\,(a-\tfrac{5}{2}\omega) + \\
& + \frac{19087}{60480}\,\lambda_0^{\mathrm{VI}}(a-3\omega) + \ldots
\end{aligned}\right.$$

Ich habe neben den obigen Formeln durch einen Pfeil die Richtung derjenigen Linie angegeben, an der die adjungirten Differenzen des ersten Elementes im Differenzschema liegen.

Wir werden im nächsten Paragraphen näher untersuchen, unter welchen Bedingungen man die eine oder die andere der obigen Formeln zur numerischen Berechnung eines Integrales wählen soll. Die Formeln (8), (12) und (11) sind hierfür die bequemsten und ich stelle sie hier nochmals zusammen:

(A)

$$\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}\lambda(x)\,dx = \lambda(a) + \frac{1}{2}\lambda_0^{I}(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \frac{1}{12}\lambda_0^{II}(a+\omega) + \frac{1}{24}\lambda_0^{III}(a+\tfrac{3}{2}\omega) - \frac{19}{720}\lambda_0^{IV}(a+2\omega) + \frac{3}{160}\lambda_0^{V}(a+\tfrac{5}{2}\omega) - \cdots$$

(B)

$$\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}\lambda(x)\,dx = \lambda(a) + \frac{1}{2}\lambda_0^{I}(a-\tfrac{1}{2}\omega) + \frac{5}{12}\lambda_0^{II}(a-\omega) + \frac{3}{8}\lambda_0^{III}(a-\tfrac{3}{2}\omega) + \frac{251}{720}\lambda_0^{IV}(a-2\omega) + \frac{95}{288}\lambda_0^{V}(a-\tfrac{5}{2}\omega) + \cdots$$

(C)

$$\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}\lambda(x)\,dx = \lambda_{1/2}(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \frac{1}{12}\lambda_{1/2}^{II}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \frac{11}{720}\lambda_{1/2}^{IV}(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \frac{191}{60480}\lambda_{1/2}^{VI}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \cdots$$

Ich werde diese Formeln im Folgenden kurzweg mit (A), (B) und (C) bezeichnen.

Zuletzt werde ich noch eine Integrationsformel ableiten, die

in vielen Fällen grosse Vorzüge besitzt. Will man das definite Integral

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt$$

mittelst mechanischer Quadratur berechnen, so wird das Intervall $b-a$ in eine Zahl — s — von Theilen getheilt, und man geht bei der Berechnung von den Werthen der Function $\varphi(t)$ für $t=a$, $a+\omega$, $a+2\omega$, ... $a+s\omega$ aus, wo

$$\omega = \frac{b-a}{s}$$

ist. Hieraus erhält man unmittelbar den Werth von T_s. Um aber auch die Werthe der in die Formeln eingehenden Differenzen zu erhalten, wird es nothwendig werden, noch einige Functionswerthe zu berechnen, nämlich für $t=a+(s+1)\omega$, $t=a+(s+2)\omega$ u. s. w., oder für $t=a-\omega$, $t=a-2\omega$, u. s. w. Es erscheint deswegen als wünschenswerth eine Formel abzuleiten, wo nur solche Differenzen vorkommen, die aus den Functionswerthen $\varphi(a)$, $\varphi(a+\omega)$, ..., $\varphi(b)$ erhalten werden können, und eine solche Formel ist in der That leicht zu erhalten. Man muss zu dem Zweck in der Formel (3) für

$$\lambda^{2i-1}(a+s\omega)$$

die adjungirten Differenzen von der Form

$$\lambda_0^k\left(a+s\omega-\frac{k}{2}\omega\right),$$

und für

$$\lambda^{2i-1}(a)$$

die adjungirten Differenzen von der Form

$$\lambda_0^k\left(a+s\omega+\frac{k}{2}\omega\right)$$

einführen. Aus der Combination von I und II im vorigen Paragraphen findet man unmittelbar die gesuchte Form und da sie unter Umständen von Nutzen ist, so führe ich sie hier an. Man bekommt:

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega}\int\limits_a^{a+s\omega}\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\omega}T_s &- \frac{1}{12}\left[\lambda_0^{\mathrm{I}}\,(a+s\omega-\tfrac{1}{2}\omega) - \lambda_0^{\mathrm{I}}\,(a+\tfrac{1}{2}\omega)\right]\\
&- \frac{1}{24}\left[\lambda_0^{\mathrm{II}}\,(a+s\omega-\omega) + \lambda_0^{\mathrm{II}}\,(a+\omega)\right]\\
&- \frac{19}{720}\left[\lambda_0^{\mathrm{III}}\,(a+s\omega-\tfrac{3}{2}\omega) - \lambda_0^{\mathrm{III}}\,(a+\tfrac{3}{2}\omega)\right]\\
&- \frac{3}{160}\left[\lambda_0^{\mathrm{IV}}\,(a+s\omega-2\omega) + \lambda_0^{\mathrm{IV}}\,(a+2\omega)\right]\\
&- \frac{863}{60480}\left[\lambda_0^{\mathrm{V}}\,(a+s\omega-\tfrac{5}{2}\omega) - \lambda_0^{\mathrm{V}}\,(a+\tfrac{5}{2}\omega)\right]\\
&- \dots,
\end{aligned}
\right.
$$

eine Formel, die ebenso einfach ist wie die Formeln (5) und (6) und die nur die Kenntniss der Functionswerthe *innerhalb* der Integrationsgrenzen erfordert.

Wird in (13) $s = 1$ gesetzt, so kommt man, nach einigen Umformungen, auf die Formel (C) zurück.

§ 5. Numerische Beispiele.

Bei den numerischen Anwendungen der Formeln für mechanische Quadratur muss man zwischen zwei wesentlich verschiedenen Fällen unterscheiden. Wir nehmen an, dass die folgende Differentialgleichung zur Integration vorgelegt sei:

$$
(1)\qquad \frac{dx}{dt} = \varphi.
$$

Es kann dann vorkommen *entweder*, dass φ eine gegebene und völlig bekannte Function von t ist, *oder* dass die Function φ sowohl von t wie von x abhängt.

Im ersteren Falle ist

$$
\frac{dx}{dt} = \varphi(t)
$$

und

$$
x = \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\,dt.
$$

Die Formeln im vorigen Paragraphen lassen sich hier direct anwenden. Man theilt das Intervall zwischen t_0 und t_1 in s Theile, so dass

$$\omega = \frac{t_1 - t_0}{s},$$

berechnet die Werthe von $\varphi(t)$ für $t = t_0$, $t = t_0 + \omega$, $t = t_0 + 2\omega, \ldots$, $t = t + s\omega = t_1$, und bildet das entsprechende Differenzschema. Wenn es nöthig ist, berechnet man auch einige Werthe der Function $\varphi(t)$ für solche Werthe von t, die ausserhalb des Gebietes $t_1 - t_0$ liegen. Irgend eine von den Formeln (5), (6), (7) oder (13) im vorigen Paragraphen giebt dann ohne weitere Schwierigkeit den gesuchten Werth des Integrales.

Wir nehmen beispielsweise an, dass man das Integral

$$x = \int_1^{10} \frac{dt}{t}$$

berechnen will. Hier ist $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ und man muss zuerst einen bestimmten Werth für ω wählen. Je kleiner ω gewählt wird, um so genauer lässt sich der Werth des Integrales berechnen. Es ist nicht immer zu erwarten, dass man die Genauigkeit — was für einen Werth ω auch haben mag — dadurch beliebig gross machen kann, dass man hinreichend viele Glieder in den Integrationsformeln mitnimmt. Wir wissen schon, dass diese Reihen im Allgemeinen divergent sind und dass die Glieder im Allgemeinen nicht gegen Null abnehmen, sondern hinreichend weit in der Reihe in vielen Fällen sogar zu wachsen anfangen. Wenn man aber ω hinreichend klein macht, so kann man immer — wenn es sich um analytische Functionen handelt — die Genauigkeit beliebig weit treiben und zwar aus zwei Gründen, theils weil die Differenzen mit abnehmendem ω kleiner werden, theils weil jedes Glied in den Integrationsformeln ω als Factor enthält.

In dem vorliegenden Fall liegt es am nächsten $\omega = 1$ zu wählen. Da aber die untere Grenze des Integrales nahe einer

Unendlichkeitsstelle der Function $\varphi(t)$ liegt, so werden die Differenzen

$$\varphi_0{}^i\left(1+\frac{i}{2}\,\omega\right)$$

sehr gross und es empfiehlt sich ω kleiner zu wählen.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate, die man für $\omega = \frac{1}{2}$ erhält. Es ist nicht nothwendig die Differenzen in der Mitte des Schemas auszuschreiben, sondern es genügen so viele Differenzen im Anfang und am Ende, wie erforderlich sind, um die in der Formel vorkommenden Differenzen zu erhalten.

t	$\varphi = \frac{1}{t}$	$\varphi_0{}^{I}$	$\varphi_0{}^{II}$	$\varphi_0{}^{III}$	$\varphi_0{}^{IV}$	$\varphi_0{}^{V}$
1.0	1.0000					
		−0.3333				
1.5	0.6667		+0.1666			
		−0.1667		−0.0999		
2.0	0.5000		+0.0667		+0.0665	
		−0.1000		−0.0834		−0.0478
2.5	0.4000		+0.0333		+0.0192	
		−0.0667		−0.0142		
3.0	0.3333		+0.0191			
		−0.0476				
3.5	0.2857					
4.0	0.2500					
4.5	0.2222					
5.0	0.2000					
5.5	0.1818					
6.0	0.1667					
6.5	0.1538					
7.0	0.1429					
7.5	0.1333					
		−0.0083				
8.0	0.1250		+0.0009			
		−0.0074		−0.0000		
8.5	0.1176		+0.0009			
		−0.0065		−0.0002		
9.0	0.1111		+0.0007			
		−0.0058		−0.0002		
9.5	0.1053		+0.0005			
		−0.0053				
10.0	0.1000					

Die Tabelle giebt

$$T = 2.3227$$

$$\lambda_0^{\text{I}}\,(a + s\,\omega - \tfrac{1}{2}\omega) - \lambda_0^{\text{I}}\,(a + \tfrac{1}{2}\omega) = +\,0.3280$$

$$\lambda_0^{\text{II}}\,(a + s\,\omega - \quad \omega) + \lambda_0^{\text{II}}\,(a + \quad \omega) = +\,0.1671$$

$$\lambda_0^{\text{III}}\,(a + s\,\omega - \tfrac{3}{2}\omega) - \lambda_0^{\text{III}}\,(a + \tfrac{3}{2}\omega) = +\,0.0997$$

$$\lambda_0^{\text{IV}}\,(a + s\,\omega - 2\,\omega) + \lambda_0^{\text{IV}}\,(a + 2\,\omega) = +\,0.0665$$

$$\lambda_0^{\text{V}}\,(a + s\,\omega - \tfrac{5}{2}\omega) - \lambda_0^{\text{V}}\,(a + \tfrac{5}{2}\omega) = +\,0.0473$$

und nach (13) § 4 bekommt man also, wenn man die Differenzen der sechsten und höheren Ordnungen vernachlässigt,

$$\int_1^{10} \frac{d\,t}{t} = 2.3033$$

Der wahre Werth ist 2.3026 und der Fehler ist also 7 Einheiten in der vierten Decimalstelle. Die Nähe der Unendlichkeitsstelle der Function $\varphi(t)$ macht sich noch fühlbar. Wäre die untere Grenze weiter von Null entfernt, würde man, mit demselben Werth von ω, bedeutend genaueren Werth für das Integral erhalten können.

Bei der numerischen Rechnung empfiehlt sich den Coefficienten der dritten Differenzen in der Form

$$\frac{19}{720} = \frac{1}{36} - \frac{1}{720}$$

zu schreiben. Für den Coefficienten der vierten und fünften Differenzen kann eine ähnliche Umformung von Nutzen sein, indem nämlich

$$\frac{3}{160} = \frac{1}{40} - \frac{1}{160}$$

$$\frac{863}{60480} = \frac{1}{70} - \frac{1}{60480}$$

ist.

In demjenigen Specialfall der Gleichung (1), den wir jetzt behandelt haben — dass nämlich φ nur eine Function von t ist —,

sind die Schwierigkeiten bei der Berechnung der Integrale von nur technischer Natur. Liegt die Aufgabe vor, eine zusammengehörige Reihe von Integralen zu berechnen, so sind gewisse systematische Anordnungen der Berechnung von Nutzen. Man findet diese Seite des Problems in den grundlegenden Arbeiten von ENCKE in dem „Berliner astronomischen Jahrbuch" für 1837 und 1862 ausführlich auseinandergesetzt. Diese Rechnungsvorschriften, die man jetzt in den meisten Lehrbüchern wiederfindet, sind besonders für die numerische Berechnung der speciellen Störungen der Planeten ausgearbeitet.

Ist die rechte Seite von (1) nicht nur von t, sondern auch von x abhängig, gestaltet sich die numerische Berechnung des Integrales bedeutend schwieriger. Die numerischen Werthe der Function $\varphi(x,t)$, für eine Reihe von Werthen von t, lassen sich dann nicht direct berechnen und die Berechnung des Integrales kann nur geschehen, indem man schrittweise um ein Intervall ω vorwärts geht.

Wir nehmen zuerst an, dass die Werthe für φ und x für eine Reihe von t-Werthen bekannt sind. Wir nehmen an, dass diese Werthe für $t = t_0$, $t = t_0 - \omega$, $t = t_0 - 2\omega$, ... bekannt sind und wir wollen den Werth von x für $t = t_0 + \omega$ erhalten.

Aus den gegebenen Werthen von φ können wir nun die Differenzen

$$\varphi_0^{\mathrm{I}}(t_0 - \tfrac{1}{2}\omega), \quad \varphi_0^{\mathrm{II}}(t - \omega), \quad \varphi_0^{\mathrm{III}}(t - \tfrac{3}{2}\omega), \ \ldots$$

erhalten, und setzen wir diese Werthe in (B) ein, so erhalten wir das Integral

$$\int_{t_0}^{t_0+\omega} \varphi \, dt,$$

und also auch den Werth von x für $t = t_0 + \omega$. Mit Hilfe dieses Werthes berechnet man den Werth von φ für $x = t_0 + \omega$, woraus eine neue Reihe von Differenzen erhalten wird. Aus (B) folgt dann der Werth von x für $t = t_0 + 2\omega$, und die Rechnung kann beliebig weit fortgesetzt werden.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass eine Reihe von φ-Werten schon vorliegt. Es ist auch nothwendig zu zeigen, wie man die

Rechnung anlegen soll, wenn nur der Werth für $t = t_0$ bekannt ist, wenn man also die Rechnung „anfangen" soll.

Wir bezeichnen den Werth von x für $t = t_0 + i\omega$ mit x_i, und den entsprechenden Werth von φ mit φ_i. Beim Anfang der Rechnung ist nur x_0 und φ_0 bekannt.

Der Zuwachs von x, indem t von t_0 bis $t_0 + \omega$ wächst, wird aus der Formel (A) erhalten, die hier lautet:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_0+\omega} \varphi(x, t)\, dt = \omega\, [\varphi(t_0) & \\ & + \tfrac{1}{2}\, \varphi_0^{\mathrm{I}}\,(t_0 + \tfrac{1}{2}\omega) - \\ & - \tfrac{1}{12}\, \varphi_0^{\mathrm{II}}\,(t_0 + \ \ \omega) + \\ & + \tfrac{1}{24}\, \varphi_0^{\mathrm{III}}\,(t_0 + \tfrac{3}{2}\omega) - \\ & - \ldots] \end{aligned} \right.$$

In dieser ist aber nur das erste Glied rechter Seite bekannt. Wenn aber ω verkleinert wird, so weiss man, dass das zweite Glied in der Parenthese auch verkleinert wird, *wogegen das erste Glied* — $\varphi(t_0)$ — *unverändert bleibt.* Wir können deswegen für kleine ω in der ersten Annäherung

$$(3) \qquad x_1 = x_1^{(1)} = x_0 + \omega\, \varphi_0$$

setzen. Mit diesem Werth von x_1 berechnet man einen genäherten Werth für $\varphi(x_1, t + \omega)$, den wir $\varphi_1^{(1)}$ nennen wollen. Der Unterschied zwischen $\varphi_1^{(1)}$ und φ_0 giebt uns einen genäherten Werth für $\varphi_0^{\mathrm{I}}(t_0 + \frac{1}{2}\omega)$, welcher in (2) eingesetzt einen verbesserten Werth für x_1 giebt. Mit diesem Werth für x_1 wird ein verbesserter Werth für $\varphi_0^{\mathrm{I}}(t_0 + \frac{1}{2}\omega)$ berechnet und gleichzeitig ein genäherter Werth für x_2, aus dem ein Werth für $\varphi_0^{\mathrm{II}}(t_0 + \omega)$ hervorgeht. Die Rechnung wird wieder vom Neuen angefangen und so lange fortgesetzt, bis hinreichend genaue Ausgangswerthe für x und φ erhalten worden sind.

Das Rechnungsverfahren, das ich oben skizzirt habe, und das in der Praxis oft recht mühsam ausfallen kann, ist in der

Hauptsache mit einer Entwickelung von x nach den Potenzen von ω, d. h. nach den Potenzen von $t - t_0$, identisch. In denjenigen Fällen, in denen es nicht allzu unbequem ist, die Differentialquotienten von φ analytisch darzustellen und numerisch zu berechnen, wird es geeignet sein, die Berechnung der Anfangswerthe für x durch eine directe analytische Entwickelung nach den Potenzen von ω auszuführen. Es ist

$$\int_{t_0}^{t_0+\omega} \varphi\, dt = \omega\varphi + \frac{\omega^2}{\underline{|2}}\varphi^{\mathrm{I}} + \frac{\omega^3}{\underline{|3}}\varphi^{\mathrm{II}} + \frac{\omega^4}{\underline{|4}}\varphi^{\mathrm{III}} + \ldots, \tag{4}$$

wo zu bemerken ist, dass die Werthe für die Function φ und ihre Ableitungen für $t = t_0$ zu berechnen sind, und dass sämmtliche diese Functionen von t wie von x abhängen. Es ist also

$$\varphi^{\mathrm{I}} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\varphi^{\mathrm{II}} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + $$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\varphi + \varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

u. s. w.

Als einfaches Beispiel nehmen wir an, dass die folgende Differentialgleichung vorgelegt wäre:

$$\frac{dx}{dt} = x,$$

mit der Bedingung, dass $x = 1$ ist für $t = 0$.

Es ist also

$$x - 1 = \int_0^t x\, dt. \tag{5}$$

Werden die Anfangswerthe mittelst einer Potenzreihe berechnet, so gestaltet sich die Rechnung hier sehr einfach, indem diese nämlich lautet:

$$x = 1 + t + \frac{t^2}{\underline{|2}} + \frac{t^3}{\underline{|3}} + \ldots$$

Setzen wir $\omega = 0.1$ und berechnen aus der Potenzreihe die Werthe von x für $t = \omega$, 2ω und 3ω, so können die übrigen Werthe mittelst (B) berechnet werden. Wir erhalten

t	$x = \varphi$	φ_0^{I}	φ_0^{II}	φ_0^{III}	φ_0^{IV}
0.0	1.0000				
		+0.1052			
0.1	1.1052		+0.0110		
		+0.1162		+0.0012	
0.2	1.2214		+0.0122		+0.0002
		+0.1284		+0.0014	
0.3	**1.3498**		+0.0136		−0.0001
		+0.1420		+0.0013	
0.4	1.4918		+0.0149		+0.0003
		+0.1569		+0.0016	
0.5	1.6487		+0.0165		+0.0001
		+0.1734		+0.0017	
0.6	1.8221		+0.0182		+0.0003
		+0.1916		+0.0020	
0.7	2.0137		+0.0202		+0.0001
		+0.2118		+0.0021	
0.8	2.2255		+0.0223		+0.0002
		+0.2341		+0.0023	
0.9	2.4596		+0.0246		
		+0.2587			
1.0	2.7183				

Die Berechnung der x-Werthe geschieht viel schneller und angenehmer mittelst mechanischer Quadratur als mit Hilfe der Potenzreihe. Die letzte Zahl giebt den Werth von e — der Basis der natürlichen Logarithmen — genau bis auf die vierte Decimalstelle.

Wollte man in diesem Falle auch die Anfangswerthe mittelst mechanischer Quadratur berechnen, würde sich die Rechnung folgendermaassen gestalten.

Wir setzen

$$\Delta^{(i)} = \int_{(i-1)\omega}^{i\omega} x\,dt.$$

Die Werthe, die man für $\Delta^{(i)}$ in der ersten, zweiten u. s. w. Annäherung erhält, bezeichnen wir mit $\Delta_1^{(i)}$, $\Delta_2^{(i)}$ u. s. w.

Nach (3) erhalten wir in der *ersten* Annäherung

$$\Delta_1^{(1)} = \omega x_0 = 0.1,$$

woraus für x das genäherte Differenzschema

$$\begin{array}{ll}
1.0000 & \\
 & +0.1000 \\
1.1000 &
\end{array}$$

entsteht. Mittelst (A) berechnen wir hieraus einen Werth für $\varDelta^{(1)}$ in der *zweiten* Annäherung

$$\varDelta_2^{(1)} = 0.1\,[1.0000 + 0.0500] = +\,0.1050$$

und mittelst (B) einen Werth für $\varDelta^{(2)}$ in der *ersten* Annäherung

$$\varDelta_1^{(2)} = +\,0.1150.$$

Wir erhalten hieraus das zweite Differenzschema für x:

$$\begin{array}{lll}
1.0000 & & \\
 & +0.1050 & \\
1.1050 & & +0.0100 \\
 & +0.1150 & \\
1.2200 & &
\end{array}$$

Wir können nun die *dritte* Annäherung für $\varDelta^{(1)}$ vornehmen, welche giebt [nach (A)]

$$\varDelta_3^{(1)} = +\,0.1052.$$

Die zweite Annäherung für $\varDelta^{(2)}$ giebt nach (A)

$$\varDelta_2^{(2)} = +\,0.1163$$

und die erste Annäherung für $\varDelta^{(3)}$ ist nach (B)

$$\varDelta_1^{(3)} = +\,0.1282.$$

Wir erhalten hieraus das dritte Differenzschema:

$$\begin{array}{llll}
1.0000 & & & \\
 & +0.1052 & & \\
1.1052 & & +0.0111 & \\
 & +0.1163 & & +0.0008 \\
1.2215 & & +0.0119 & \\
 & +0.1282 & & \\
1.3497 & & &
\end{array}$$

Noch eine *vierte* Annäherung muss gemacht werden, die aber nur unbedeutende Correctionen der eben erhaltenen Werthe giebt.

Dann erhalten wir aber die endgültigen Anfangswerthe, mit denen man nach (B) in derselben Weise wie früher fortsetzen kann.

Wenn man die Formel (B) mit der Formel (9) des vierten Paragraphen vergleicht, so findet man, dass die Coefficienten der Differenzen in (9) bedeutend kleiner sind als die entsprechenden Coefficienten in (B), woraus folgt, dass, *so oft eine Wahl möglich ist*, die Formel (9) der Formel (B) vorzuziehen ist. Wenn es sich um den allgemeineren Fall handelt, dass in den Differentialquotienten sowohl die abhängigen wie die unabhängigen Veränderlichen vorkommen, also wenn in der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varphi$$

die rechte Seite von t *und* x abhängt, so kann die Formel (9) nicht direct zur Anwendung kommen, wogegen man mittelst (B) mit den Integrationen schrittweise vorwärts schreiten kann.

In indirecter Weise kann aber die Integration auch mit Hilfe von (9) allein ausgeführt werden.[1] Wenn nämlich die Functionswerthe für $t = t_0$, $t_0 - \omega$, $t_0 - 2\omega$ u. s. w. gegeben sind, so kann man durch *Extrapolation* sich einen Functionswerth für $t = t_0 + \omega$ verschaffen und sich dann der Formel (9) für die Integration bedienen.

Eine solche Extrapolation kann beispielsweise so geschehen, dass man eine Differenz höherer Ordnung — etwa der 4ten oder 5ten Ordnung — als constant betrachtet und dann durch eine einfache Addition den Functionswerth für $t = t_0 + \omega$ und die entsprechenden Differenzen höherer Ordnung ableitet.

Der extrapolirte Functionswerth stimmt nicht immer mit dem durch die Integration erhaltenen Werth für die gesuchte Function überein. Es wird dann nothwendig sein, eine neue Rechnung auszuführen, unter Anwendung des durch die Integration erhaltenen Functionswerthes.

---

[1] G. H. Darwin, der die mechanische Quadratur in grosser Ausdehnung benutzt hat, bedient sich immer der Formel (9).

Ist das Intervall ω zu gross gewählt, so lässt sich mittelst (B) der Werth des Integrales nicht mit hinreichender Genauigkeit berechnen. Es ist dann im Allgemeinen nothwendig, die Rechnung mit kleinerem ω-Werthe durchzuführen. Wird das Intervall ω gegen $m\omega$ vertauscht, so werden die Differenzen n^{ter} Ordnung um m^n vergrössert bez. verkleinert, je nachdem m grösser oder kleiner als die Einheit ist.[1] Wenn man beispielsweise das Intervall halbirt, werden die Differenzen 1ter Ordnung halbirt, diejenigen der 2ten Ordnung viermal verkleinert, der 3ten Ordnung achtmal verkleinert u. s. w. Eine Halbirung des Intervalles hat also einen bedeutenden Einfluss auf die Convergenz der Integrationsformeln.

Die Wahl von ω hängt von der bei der Integration beabsichtigten Genauigkeit des Resultates ab. Je kleiner ω ist, desto grösser ist die Genauigkeit, die bei der Rechnung erreicht werden kann. Es kann auch vorkommen, dass die Formel (B) die gewünschte Genauigkeit nicht giebt, dass dagegen eine solche mittelst (9) erreicht werden kann. In diesem Falle müssen bei jeder Integration zwei Annäherungen gemacht werden, indem man einmal die Formel (B) benutzt und sich hierdurch einen genäherten Werth des Functionswerthes verschafft, und dann mittelst (9) eine zweite Integration ausführt. Man kann in solchem Falle vielleicht mit gleichem Vortheil bei beiden Annäherungen sich der Formel (9) in oben beschriebener Weise bedienen.

Bei der numerischen Rechnung muss man darauf achten, nicht allzu viele Glieder in der Integrationsformel mitzunehmen. Diese Formel ist fast immer divergent, und es ist also kein unbedingter Vorteil, sehr viele Glieder in der Formel zu benutzen. In der Praxis bin ich dem Prinzip gefolgt, die Reihe mit dem kleinsten Glied abzubrechen (das kleinste Glied wird *nicht* mitgenommen), und den Fehler ungefähr gleich dem doppelten Betrag des kleinsten Gliedes geschätzt. Es ist zwar, wie oben bemerkt worden ist, nicht bewiesen, dass dem wirklich auch so ist, aber das

---

[1] Vgl. Rice: The Theory and Practice of Interpolation, wo man über verschiedene Fragen, die mit dem hier behandelten Thema zusammenhängen, interessante Aufschlüsse findet.

wahre Resultat wird nicht weit hiervon abweichen, wenn ω so klein gewählt worden ist, dass die Differenzen innerhalb des Intervalles nicht das Zeichen wechseln.

Wenn es sich um die Berechnung eines *Doppelintegrales* handelt, kann man entweder das obige Integrationsverfahren zweimal benutzen, oder die zweifache Integration direct ausführen, wofür man mit (A), (B) und (C) analoge Integrationsformeln aufstellen kann. Indessen ist die letztere Methode im Allgemeinen nicht zu empfehlen, wenn im Ausdrucke für das zweite Differential sowohl die unabhängige Veränderliche, wie die abhängige Veränderliche und deren erster Differentialquotient vorkommt, also wenn die Differentialgleichung die Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

hat. Man führt dann besser eine neue Veränderliche

$$y = \frac{dx}{dt}$$

ein und schreibt die Gleichung in der Form

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \varphi(t, x, y), \\ \frac{dx}{dt} &= y, \end{aligned} \right.$$

welche Gleichungen mittelst der Formeln (A), (B) und (C) integrirt werden können.

Die canonischen Differentialgleichungen in der Mechanik haben alle diese Form, und um die Frage von der Integration solcher Gleichungen mittelst mechanischer Quadratur zu beleuchten, werde ich hier die Integration der canonischen Differentialgleichungen mit zwei Freiheitsgraden an einem bestimmten numerischen Beispiele ausführlich auseinandersetzen.

Es handelt sich um die Bewegung eines Körpers mit verschwindender Masse, der von zwei Körpern m_1 und m_2, die sich in einem Kreise um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen, attrahirt

wird. Die rechtwinkligen Coordinaten q_1 und q_2 sind auf den Schwerpunkt bezogen, und die x-Achse dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so dass sie stets gegen die Masse m_1 gerichtet ist. Die Geschwindigkeit — n — der Achsendrehung hat somit den Werth

$$(7)\qquad n = \sqrt{1+\mu} = 1 + \frac{\mu}{1+\sqrt{1+\mu}} = 1 + \nu,$$

wenn wir die Masse des grossen Körpers — m_1 — mit Eins bezeichnen und die Masse von m_2 mit μ.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind nach § 8 des ersten Abschnittes

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = p_1 + n q_2, & \dfrac{dp_1}{dt} = \quad n p_2 - A - B, \\[2ex] \dfrac{dq_2}{dt} = p_2 - n q_1, & \dfrac{dp_2}{dt} = - n p_1 - C - D, \end{cases}$$

wo

$$A = \frac{1}{\varrho_1^3}\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right), \qquad C = \frac{q_2}{\varrho_1^3},$$

$$B = \frac{\mu}{\varrho_2^3}\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right), \qquad D = \frac{\mu q_2}{\varrho_2^3},$$

und ϱ_1 und ϱ_2 die Abstände des massenlosen Körpers von m_1 und m_2 bezeichnen.

Die Gleichungen (8) besitzen das Integral

$$(9)\qquad \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C,$$

wo

$$(9^*)\qquad 2\Omega = \varrho_1^2 + \frac{2}{\varrho_1} + \mu\left(\varrho_2^2 + \frac{2}{\varrho_2}\right)$$

ist.

Die Anfangslage und die Constante C wurden so gewählt, dass sie einer der von DARWIN in seiner Arbeit „On periodic orbits“ berechneten periodischen Lösungen der Differentialgleichungen (8) entsprachen. Für μ ist derselbe Werth wie in der betreffenden Arbeit DARWIN's, nämlich

$$\mu = 0.1,$$

angenommen, und für C der Werth

$$C = 3.950.$$

Die Werthe der Coordinaten und der Geschwindigkeiten für $t = 0$ sind

$$q_1^0 = -0.97409, \quad q_2^0 = 0.00000,$$
$$q_1'^0 = 0, \quad q_2'^0 = 1.462,$$

welcher letztere Werth aus dem angenommenen Werth für C erhalten worden ist. Die Differentialgleichungen geben hieraus

$$p_1^0 = 0, \quad p_2^0 = -2.484,$$
$$p_1'^0 = +21.94, \quad p_2'^0 = 0.$$

Für das Intervall ω wurde der Werth

$$\omega = 0.01$$

gewählt.

Die Berechnung der Werthe von q_i und p_i für $t = 0.00$, 0.01, 0.02, 0.03 wird hier übergangen. Sie geschah in früher beschriebener Weise mittelst mechanischer Quadratur, könnte aber in diesem Falle leichter durch Entwickelung nach Potenzen von t ermittelt werden. In der folgenden Tafel I sind also die Werthe von q_1', q_2', p_1', p_2' für $t = 0.00$, 0.01, 0.02 und 0.03, und die entsprechenden Differenzen als gegeben anzusehen.

Die Rechnung geschieht auf drei verschiedenen Zetteln, welche wir als Blatt I, II und III bezeichnen wollen. In Blatt I werden die jedesmal erhaltenen Werthe von q_1', q_2', p_1', p_2' eingetragen. Auf Blatt II wird die Berechnung dieser Werthe aus der Formel (8) ausgeführt und endlich werden auf III die Integrationen vollzogen.

Das Intervall ($\Delta t = 0.01$) ist etwas zu gross gewählt, so dass die Formel (B) nicht hinreichend genaue Werthe für die Integrale giebt, wie man aus der Grösse der vernachlässigten Differenzen findet. Die Ungenauigkeit ist aber nicht so gross, dass eine Verkleinerung des Intervalles nothwendig ist, sondern ich habe vorgezogen, die Rechnungen für jedes Intervall zweimal auszuführen,

indem das erste Mal die Integrationsformel (B), das zweite Mal die Formel (9) benutzt wurde.

Der Gang der Rechnung ist somit der folgende, nachdem sie bis $t = t_0$ fortgeschritten ist.

Zuerst werden auf Blatt III unter Anwendung der Formel (B) die Werthe von q_1, q_2, p_1 und p_2 für $t = t_0 + \omega$ berechnet. Mittelst dieser Werthe werden auf Blatt II die entsprechenden Werthe der Ableitungen q_1', q_2', p_1', p_2' erhalten. Diese Grössen, die nur als Annäherungen zu betrachten sind, werden mit Bleistift in die Tabelle I eingetragen. Man kehrt dann zum Blatte III zurück und führt die Integration zwischen t_0 und $t_0 + \omega$ mittelst (9) aus. Die so erhaltenen Coordinatenwerthe geben auf Blatt II die definitiven Werthe der Ableitungen, welche dann in das Blatt I eingetragen werden.

Die Rechnung, die durchgehend vierstellig geführt wurde, hat folgendes Aussehen.

(Siehe Tabellen auf Seite 68—85).

Die zweifache Ausführung der Integration und die entsprechende zweifache Berechnung der Ableitungen auf Blatt II ist natürlich ein Uebelstand, der vermieden werden könnte, wenn man das Intervall verkleinerte, z. B. halbirte. Man würde aber hierdurch nicht an Zeit gewinnen, sondern umgekehrt, da die Berechnung der Ableitungen — der mühsamste Theil der Arbeit — bei der zweiten Rechnung verhältnissmässig bequem ist. Erstens kann man die Rechenarbeit hier dadurch sehr erleichtern, dass man bei der ersten Rechnung die Tabellendifferenzen bei allen Logarithmen einträgt, wie es in der folgenden Rechnung in der kleinen Columne jedes Intervalles geschehen ist. Hierdurch erspart man bei der zweiten Rechnung alle Nachschlagungen von Logarithmen. Zweitens sind gewöhnlich die bei der ersten Annäherung erhaltenen Werthe so genau, dass man nur einen Theil der zweiten Rechnung auszuführen braucht. In der obigen Rechnung sind für $t > 0.12$ nur unbedeutende Correctionsrechnungen bei der zweiten Annäherung erforderlich.

Blatt L

q_1'				
0.00	+ 0.0000			
		+0.2009		
.01	+ 0.2009		−0.0185	
		+0.1824		−0.0119
.02	+ 0.3833		−0.0304	
		+0.1520		−0.0050
.03	+ 0.5353		−0.0354	
		+0.1166		+0.0016
.04	+ 0.6519		−0.0338	
		+0.0828		+0.0057
.05	+ 0.7347		−0.0281	
		+0.0547		+0.0059
.06	+ 0.7894		−0.0222	
		+0.0325		+0.0053
.07	+ 0.8219		−0.0169	
		+0.0156		+0.0045
.08	+ 0.8375		−0.0124	
		+0.0032		+0.0038
.09	+ 0.8407		−0.0086	
		−0.0054		+0.0022
.10	+ 0.8353		−0.0064	
		−0.0118		+0.0022
.11	+ 0.8235		−0.0042	
		−0.0160		+0.0014
.12	+ 0.8075		−0.0028	
		−0.0188		+0.0009
.13	+ 0.7887		−0.0019	
		−0.0207		+0.0008
.14	+ 0.7680		−0.0011	
		−0.0218		
.15	+ 0.7462			

q_2'				
0.00	− 1.462			
		+0.025		
.01	− 1.437		+0.042	
		+0.067		−0.011
.02	− 1.370		+0.031	
		+0.098		−0.0146
.03	− 1.272		+0.0164	
		+0.1154		−0.0110
.04	− 1.1566		+0.0054	
		+0.1208		−0.0085
.05	− 1.0358		−0.0031	
		+0.1177		−0.0045
.06	− 0.9181		−0.0076	
		+0.1101		−0.0011
.07	− 0.8080		−0.0087	
		+0.1014		−0.0024
.08	− 0.7066		−0.0111	
		+0.0903		+0.0013
.09	− 0.6163		−0.0098	
		+0.0805		+0.0009
.10	− 0.5357		−0.0089	
		+0.0716		+0.0009
.11	− 0.4641		−0,0080	
		+0.0636		+0.0013
.12	− 0.4005		−0.0067	
		+0.0569		+0.0007
.13	− 0.3436		−0.0060	
		+0.0509		+0.0008
.14	− 0.2927		−0.0052	
		+0.0457		
.15	− 0.2471			

p_1'				
0.00	+21.94			
		−1.00		
.01	+20.94		−1.65	
		−2.65		+0.79
.02	+18.29		−0.86	
		−3.51		+0.715
.03	+14.78		−0.145	
		−3.655		+0.555
.04	+11.125		+0.410	
		−3.245		+0.185
.05	+ 7.870		+0.595	
		−2.650		+0.013
.06	+ 5.220		+0.608	
		−2.042		−0.136
.07	+ 3.178		+0.472	
		−1.570		−0.033
.08	+ 1.608		+0.439	
		−1.131		−0.128
.09	+ 0.477		+0.311	
		−0.820		−0.076
.10	− 0.3426		+0.235	
		−0.5853		−0.062
.11	− 0.9279		+0.1732	
		−0.4121		−0.0477
.12	− 1.3400		+0.1255	
		−0.2866		−0.0437
.13	− 1.6266		+0.0818	
		−0.2048		+0.0073
.14	− 1.8314		+0.0891	
		−0.1157		
.15	− 1.9471			

p_2'				
0.00	+ 0.000			
		+4.930		
.01	+ 4.930		−0.936	
		+3.994		−0.482
.02	+ 8.924		−1.418	
		+2.576		+0.018
.03	+11.500		−1.400	
		+1.176		+0.355
.04	+12.676		−1.045	
		+0.131		+0.388
.05	+12.807		−0.662	
		−0.531		+0.327
.06	+12.276		−0.335	
		−0.866		+0.208
.07	+11.410		−0.132	
		−0.998		+0.148
.08	+10.412		+0.011	
		−0.987		+0.016
.09	+ 9.425		+0.027	
		−0.960		+0.083
.10	+ 8.465		+0.110	
		−0.850		−0.020
.11	+ 7.615		+0.090	
		−0.760		+0.007
.12	+ 6.855		+0.097	
		−0.663		+0.002
.13	+ 6.192		+0.099	
		−0.564		−0.079
.14	+ 5.628		+0.020	
		−0.544		
.15	+ 5.084			

Blatt

t	0.04			0.05		
q_1	−0.959580		−0.959552	−0.952616		−0.952589
$q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}$	−1.050489		−1.050461	−1.043525		−1.043498
$q_1 + \frac{1}{1+\mu}$	−0.050489		−0.050461	−0.043525		−0.043498
q_2	−0.05399		−0.054010	−0.064992		−0.064976
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)$	0.0214_n	41	0.0214_n	0.0185_n	42	0.0185_n
$\log\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)$	8.7032_n	9	8.7030_n	8.6387_n	10	8.6384_n
$\log q_2$	8.7323_n	8	8.7325_n	8.8128_n	7	8.8127_n
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2$	0.0428		0.0428	0.0370		0.0370
$\log q_2^2$	7.4646		7.4650	7.6256		7.6254
$\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2$	1.1036	2	1.1036	+1.0890	2	+1.0890
q_2^2	0.002915	6	0.002917	+0.004223	10	+0.004221
ϱ_1^2	1.1065		1.1065	+1.0932		+1.0932
$\log \varrho_1^2$	0.0439	39	0.0439	0.0387	40	0.0387
$\log \varrho_1$	0.0219.$_5$		0.0220	0.0194		0.0194
$\log\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)^2$	7.4064		7.4060	7.2774		7.2768
$\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)^2$	0.002549	6	0.002547	0.001894	5	0.001891
q_2^2	0.002915		0.002917	4223		4221
ϱ_2^2	0.005464		0.005464	+0.006117		+0.006112
$\log \varrho_2^2$	7.7375	8	7.7375	7.7866	8	7.7862
$\log \varrho_2$	8.8687.$_5$		8.8688	8.8933		8.8931
q_2	−0.05399		−0.054010	−0.064992		−0.064976
νq_2	−0.00263		−0.00263	3172		3171
$n q_2$	−0.05662		−0.05664	−0.068164		−0.068147
p_1	+0.7087		+0.7085	+0.8036		+0.8029
q_1'	+0.6521		+0.6519	+0.7354		+0.7347

II.

0.06			0.07		
−0.944963		−0.944942	−0.936870		−0.936868
−1.035872		−1.035851	−1.027779		−1.027777
−0.035872		−0.035851	−0.027779		−0.027777
−0.074749		−0.074738	−0.083376		−0.083359
0.0153_n	42	0.0153_n	0.0118_n	42	0.0118_n
8.5548_n	12	8.5546_n	8.4437_n	15	8.4437_n
8.8736_n	6	8.8735_n	8.9211_n	6	8.9210_n
0.0306		0.0306	0.0236		0.0236
7.7472		7.7470	7.8422		7.8420
+1.0730	2	+1.0730	1.0558	3	1.0558
+0.005588	13	+0.005585	0.006953	16	0.006950
+1.0786		+1.0786	1.0628		1.0628
0.0328	40	0.0328	0.0264	41	0.0264
0.0164		0.0164	0.0132		0.0132
7.1096		7.1092	6.8874		6.8874
0.001287	3	0.001286	0.000772	1.8	0.000772
5588	13	5588	6953		0.006950
+0.006875		+0.006871	0.007725		0.007722
7.8373	6	7.8371	7.8879	6	7.8877
8.9186		8.9185	8.9440		8.9438
−0.074749		−0.074738	−0.083376		−0.083359
− 3647		− 3647	− 4009		− 4009
−0.078396		−0.078385	−0.087385		−0.087368
+0.8692		+0.8678	+0.9099		+0.9093
+0.7908		+0.7894	+0.8225		+0.8219

Blatt II

t	0.04			0.05		
$-q_1$	+ 0.959580		+ 0.959552	+ 0.952616		+ 0.952589
$-\nu q_1$	+ 0.04683		+ 0.04682	+ 0.04649		4648
$-n q_1$	+ 1.00641		+ 1.00637	+ 0.99911		0.99907
p_2	− 2.1647		− 2.1630	− 2.0361		− 2.0349
q_2'	− 1.1583		− 1.1566	− 1.0370		− 1.0358
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)$	0.0214_n		0.0214_n	0.0185_n		0.0185_n
$\log \varrho_1^3$	0.0658		0.0659	0.0581		0.0581
$\log A$	9.9556_n		9.9555_n	9.9604_n		9.9604_n
$\log \mu\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)$	7.7082_n		7.7080_n	7.6887_n		7.6884_n
$\log \varrho_2^3$	6.6063		6.6063	6.6799		6.6793
$\log B$	1.0969_n		1.0967_n	0.9588_n		0.9591_n
p_2	− 2.1647		− 2.1630	− 2.0361		− 2.0349
νp_2	− 0.1057		− 0.1057	− 0.0994		994
$n p_2$	− 2.2704		− 2.2687	− 2.1855		− 2.1843
$-A$	+ 0.9028	20	+ 0.9026	+ 0.9128	21	+ 0.9128
$n p_2 - A$	− 1.3676		− 1.3661	− 1.2227		− 1.2215
$-B$	+12.497	3	+12.491	+ 9.095	21	+ 9.101
p_1'	+11.129		+11.125	+ 7.872		+ 7.880
$\log q_2$	8.7323_n		8.7325_n	8.8128_n		8.8127_n
$\log \varrho_1^3$	0.0658		0.0659	0.0581		0.0581
$\log C$	8.6665_n		8.6666_n	8.7547_n		8.7546_n
$\log \mu q_2$	7.7323_n		7.7325_n	7.8128_n		7.8127_n
$\log \varrho_2^3$	6.6063		6.6063	6.6799		6.6793
$\log D$	1.1260_n		1.1262_n	1.1329_n		1.1334_n
$-p_1$	− 0.7087		− 0.7085	− 0.8036		− 0.8029
$-\nu p_1$	− 0.0346		− 0.0346	393		393
$-n p_1$	− 0.7433		− 0.7431	− 0.8429		− 0.8422
$-C$	+ 0.0464	11	+ 0.0464	+ 0.05685	14	+ 0.05684
$-n p_1 - C$	− 0.6969		− 0.6967	− 0.7860		− 0.7854
$-D$	+13.370	3	+13.373	+13.577	3	+13.592
p_2'	+12.673		+12.676	+12.791		+12.807

(Fortsetzung).

0.06			0.07		
+ 0.944963		+ 0.944942	+ 0.936870		+ 0.936868
+ 4611		+ 4611	+ 4571		+ 4571
+ 0.99107		+ 0.99105	+ 0.98258		+ 0.98258
− 1.9092		− 1.9091	− 1.7903		− 1.7906
− 0.9181		− 0.9181	− 0.8077		− 0.8080
0.0153$_n$		0.0153$_n$	0.0118$_n$		0.0118$_n$
0.0492		0.0492	0.0396		0.0396
9.9661$_n$		9.9661$_n$	9.9822$_n$		9.9822$_n$
7.5548$_n$		7.5546$_n$	7.4487$_n$		7.4437
6.7558		6.7555	6.8320		6.8314
0.7990$_n$		0.7991$_n$	0.6117$_n$		0.6128$_n$
− 1.9092		− 1.9091	− 1.7903		− 1.7906
− 932		− 932	873		− 873
− 2.0024		− 2.0023	− 1.8776		− 1.8779
+ 0.9249	21	+ 0.9249	+ 0.9599	22	+ 0.9599
− 1.0775		− 1.0774	− 0.9177		− 0.9180
+ 6.295	15	+ 6.297	+ 4.090	10	+ 4.096
+ 5.217		+ 5.220	+ 3.172		+ 3.178
8.8736$_n$		8.8735$_n$	8.9211$_n$		8.9210$_n$
0.0492		0.0492	0.0396		0.0396
8.8244$_n$		8.8243$_n$	8.8815$_n$		8.8814$_n$
7.8736$_n$		7.8735$_n$	7.9211$_n$		7.9210$_n$
6.7558		6.7555	6.8320		6.8314
1.1178$_n$		1.1180	1.0891$_n$		1.0896$_n$
− 0.8692		− 0.8678	− 0.9099		− 0.9093
− 424		− 424	− 444		− 444
− 0.9116		− 0.9102	− 0.9543		− 0.9537
+ 0.06674	15	+ 0.06672	+ 0.07612	18	+ 0.07610
− 0.8449		− 0.8435	− 0.8782		− 0.8776
+13.114	3	+13.120	+12.273	3	+12.288
+12.269		+12.276	+11.395		+11.410

Blatt II

t	0.08			0.09		
q_1	−0.928558		−0.928556	−0.920153		−0.920158
$q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}$	−1.019467		−1.019465	−1.011062		−1.011067
$q_1 + \frac{1}{1+\mu}$	−0.019467		−0.019465	−0.011062		−0.011067
q_2	−0.090938		−0.090925	−0.097524		−0.097528
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)$	0.0084_n	43	0.0084_n	0.0048_n	43	0.0048_n
$\log\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)$	8.2893_n	22	8.2893_n	8.0438_n	39	8.0440_n
$\log q_2$	8.9588_n	4	8.9588_n	8.9891_n	4	8.9891_n
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2$	0.0168		0.0168	0.0096		0.0096
$\log q_2^2$	7.9176		7.9176	7.9782		7.9782
$\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2$	1.0396	2	1.0396	1.0222	2	1.0222
q_2^2	0.008271	19	0.008271	0.009510	22	0.009510
ϱ_1^2	1.0479		1.0479	1.0317		1.0317
$\log \varrho_1^2$	0.0203	42	0.0203	0.0135	42	0.0135
$\log \varrho_1$	0.0102		0.0102	0.0068		0.0068
$\log\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)^2$	6.5786		6.5786	6.0876		6.0880
$\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)^2$	0.000379	0.9	0.000379	0.000122	0.3	0.000122
q_2^2	0.008271		0.008271	0.009510		0.009510
ϱ_2^2	0.008650		0.008650	0.009632		0.009632
$\log \varrho_2^2$	7.9370	5	7.9370	7.9837	5	7.9837
$\log \varrho_2$	8.9685		8.9685	8.9918		8.9918
q_2	−0.090938		−0.090925	−0.097524		−0.097528
νq_2	− 4439		4439	− 4759		− 4759
$n q_2$	−0.095377		−0.095364	−0.102283		−0.102287
p_1	+0.9335		+0.9329	+0.9426		+0.9430
q_1'	+0.8381		+0.8375	+0.8403		+0.8407

(Fortsetzung).

0.10			0.11		
−0.911770		−0.911772	−0.903468		−0.903474
−1.002679		−1.002681	−0.994377		−0.994383
−0.002679		−0.002681	+0.005628		+0.005617
−0.103294		−0.103279	−0.108269		−0.108271
0.0011_n	43	0.0011_n	9.9976_n	4	9.9976_n
7.4279_n	16	7.4282_n	7.7499	8	7.7494
9.0140_n	42	9.0139_n	9.0345_n	40	9.0345_n
0.0022		0.0022	9.9952		9.9952
8.0280		8.0278	8.0690		8.0690
1.0054	2	1.0054	0.9890	22	0.9890
0.01067	2	0.01067	0.01172	8	0.01172
1.0161		1.0161	1.0007		1.0007
0.0069	43	0.0069	0.0003	43	0.0003
0.0034		0.0034	0.0002		0.0002
4.8558		4.8564	5.5998		5.5988
0.00001		0.00001	0.00004		0.00004
0.01067		0.01067	0.01172		0.01172
0.01068		0.01068	0.01176		0.01176
8.0286	41	8.0286	8.0704	37	8.0704
9.0143		9.0143	9.0352		9.0352
−0.103294		−0.103279	−0.108269		−0.108271
− 5041		− 5041	− 5283		− 5283
−0.108335		−0.108320	−0.113552		−0.113554
+0.9438		+0.9436	+0.9369		+0.9371
+0.8355		+0.8353	+0.8234		+0.8235

Blatt II

t	0.08			0.09		
$-q_1$	+ 0.928558		+ 0.928556	+ 0.920153		+ 0.920158
$-\nu q_1$	+ 4533		+ 4533	+ 4498		+ 4498
$-n q_1$	+ 0.97389		+ 0.97389	+ 0.96513		+ 0.96514
p_2	− 1.6810		− 1.6805	− 1.5812		− 1.5814
q_2'	− 0.7071		− 0.7066	− 0.6161		− 0.6163
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)$	0.0084_n		0.0084_n	0.0048_n		0.0048_n
$\log \varrho_1^3$	0.0306		0.0306	0.0204		0.0204
$\log A$	9.9778_n		9.9778	9.9844		9.9844
$\log \mu\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)$	7.2893_n		7.2893_n	7.0438_n		7.0440_n
$\log \varrho_2^3$	6.9055		6.9055	6.9754		6.9754
$\log B$	0.3838_n		0.3838_n	$0{\cdot}0684_n$		0.0686_n
p_2	− 1.6810		− 1.6805	− 1.5812		− 1.5814
νp_2	− 820		− 820	− 772		− 772
$n p_2$	− 1.7630		− 1.7625	− 1.6584		− 1.6586
$-A$	+ 0.9502	22	+ 0.9502	+ 0.9647	23	+ 0.9647
$n p_2 - A$	− 0.8128		− 0.8123	− 0.6937		− 0.6939
$-B$	+ 2.420	6	+ 2.420	+ 1.170	4	+ 1.171
p_1'	+ 1.607		+ 1.608	+ 0.476		+ 0.477
$\log q_2$	8.9588_n		8.9588_n	8.9891_n		8.9891_n
$\log \varrho_1^3$	0.0306		0.0306	0.0204		0.0204
$\log C$	8.9282_n		8.9282_n	8.9687_n		8.9687_n
$\log \mu q_2$	7.9588_n		7.9588_n	7.9891_n		7.9891_n
$\log \varrho_2^3$	6.9055		6.9055	6.9754		6.9754
$\log D$	1.0533_n		1.0533_n	1.0137_n		1.0137_n
$-p_1$	− 0.9335		− 0.9329	− 0.9426		− 0.9430
$-\nu p_1$	− 456		− 456	− 460		− 460
$-n p_1$	− 0.9791		− 0.9785	− 0.9886		− 0.9890
$-C$	+ 0.08476	20	+ 0.08476	+ 0.09305	21	+ 0.09305
$-n p_1 - C$	− 0.8943		− 0.8937	− 0.8955		− 0.8960
$-D$	+ 11.306	2	+ 11.306	+ 10.321	3	+ 10.321
p_2'	+ 10.412		+ 10.412	+ 9.425		+ 9.425

(Fortsetzung).

0.10			0.11		
+0.911770		+0.911772	+0.903468		+0.903474
+ 4450		+ 4450	+ 4409		+ 4409
+0.95627		+0.95627	+0.94756		+0.94756
−1.4915		−1.4920	−1.4120		−1.4117
−0.5352		−0.5357	−0.4644		−0.4641
0.0011_n		0.0011_n	9.9976_n		9.9976_n
0.0102		0.0102	0.0006		0.0006
9.9909_n		9.9909_n	9.9970_n		9.9970_n
6.4279_n		6.4282_n	6.7499		6.7494
7.0429		7.0429	7.1056		7.1056
9.3850_n		9.3853_n	9.6443		9.6438
−1.4915		−1.4920	−1.4120		−1.4117
− 728		− 728	− 689		− 689
−1.5643		−1.5648	−1.4809		−1.4806
+0.9793	23	+0.9793	+0.9931	23	+0.9931
−0.5850		−0.5855	−0.4878		−0.4875
+0.2427	5	+0.2429	−0.4409	10	−0.4404
−0.3423		−0.3426	−0.9287		−0.9279
9.0140_n		9.0139_n	9.0345_n		9.0345_n
0.0102		0.0102	0.0006		0.0006
9.0038		9.0037	9.0339_n		9.0339_n
8.0140_n		8.0139_n	8.0345_n		8.0345_n
7.0429		7.0429	7.1056		7.1056
0.9711_n		0.9710_n	0.9289_n		0.9289_n
−0.9438		−0.9436	−0.9369		−0.9371
− 460		460	− 457		− 457
−0.9898		−0.9896	−0.9826		−0.9828
+0.10086	2	+0.10084	+0.10808	2	+0.10808
−0.8889		−0.8888	−0.8745		−0.8747
+9.356	22	+9.354	+8.490	20	+8.490
+8.467		+8.465	+7.616		+7.615

Blatt II

t	0.12			0.13		
q_1	−0.895317		−0.895316	−0.887331		−0.887334
$q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}$	−0.986226		−0.986225	−0.978240		−0.978243
$q_1 + \frac{1}{1+\mu}$	+0.013774		+0.013775	+0.021760		+0.021757
q_2	−0.112588		−0.112587	−0.116304		−0.116303
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)$	9.9940_n	4		9.9904_n	5	
$\log\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)$	8.1391	32		8.3377	20	8.3376
$\log q_2$	9.0515_n	39		9.0656_n	37	
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2$	9.9880			9.9808		
$\log q_2^2$	8.1030			8.1312		
$\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2$	0.9727	23		0.9568	22	
q_2^2	0.01268	3		0.01353	3	
ϱ_1^2	0.9854			0.9703		
$\log \varrho_1^2$	9.9936	5		9.9869	4	
$\log \varrho_1$	9.9968			9.9934		
$\log\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)^2$	6.2782			6.6754		
$\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)^2$	0.00019	3		0.00047		
q_2^2	0.01268			0.01353		
ϱ_2^2	0.01287			0.01400		
$\log \varrho_2^2$	8.1096	34		8.1461	31	
$\log \varrho_2$	9.0548			9.0730		
q_2	−0.112588			−0.116304		
νq_2	− 5495			5676		
$n q_2$	−0.118083		−0.118082	−0.121980		−0.1220
p_1	+0.9256		+0.9256	+0.9106		+0.9107
q_1'	+0.8075		+0.8075	+0.7886		+0.7887

(Fortsetzung).

0.14			0.15		
−0.879558		−0.879558	−0.871977		−0.871977
−0.970467			−0.962886		
+0.029588			+0.037114		
−0.119478		−0.119479	−0.122174		−0.122173
9.9870_n	4		9.9836_n	4	
8.4705	15		8.5696	11	
9.0763_n	37		9.0870_n	35	
9.9740			9.9672		
8.1526			8.1740		
0.9419	22		0.9272	22	
0.01421	3		0.01493	3	
0.9561			0.9421		
9.9805	4		9.9741	4	
9.9902			9.9870		
6.9410			7.1392		
0.00087			0.00138	3	
0.01421			0.01493		
0.01508			0.01631		
8.1784	29		8.2125	26	
9.0892			9.1062		
−0.119478			−0.122174		
− 5831			− 5963		
−0.125309			−0.128137		−0.1281
+0.8933		+0.8933	+0.8741		+0.8743
+0.7680		+0.7680	+0.7460		+0.7462

Blatt II

t	0.12			0.13		
$-q_1$	+0.895317			+0.687331		
$-\nu q_1$	4359			+ 4330		
$-n q_1$	+0.93892		+0.93892	+0.93063		+0.9306
p_2	−1.3390		−1.3394	−1.2744		−1.2742
q_2'	−0.4001		−0.4005	−0.3438		−0.3436
$\log\left(q_1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)$	9.9940_n			9.9904_n		
$\log \varrho_1^3$	9.9904			9.9802		
$\log A$	0.0036_n			0.0102_n		
$\log \mu\left(q_1 + \frac{1}{1+\mu}\right)$	7.1391			7.3377		7.3376
$\log \varrho_2^3$	7.1644			7.2190		7.2190
$\log B$	9.9747			0.1187		0.1186
p_2	−1.3390		−1.3394	−1.2744		−1.2742
νp_2	− 654		− 654	− 622		− 622
$n p_2$	−1.4044		−1.4048	−1.3366		−1.3364
$-A$	+1.0082	2	+1.0082	+1.0236	3	+1.0236
$n p_2 - A$	−0.3962		−0.3966	−0.3130		−0.3128
$-B$	−0.9434	22	−0.9434	−1.3141	3	−1.3138
p_1'	−1.3396		−1.3400	−1.6271		−1.6266
$\log q_2$	9.0515_n			9.0656_n		
$\log \varrho_1^3$	9.9904			9.9802		
$\log C$	9.0611_n			9.0854_n		
$\log \mu q_2$	8.0515_n			8.0656_n		
$\log \varrho_2^3$	7.1644			7.2190		
$\log D$	0.8871_n			0.8466_n		
$-p_1$	−0.9256			−0.9106		−0.9107
$-\nu p_1$	− 452			− 444		− 444
$-n p_1$	−0.9708			−0.9550		−0.9551
$-C$	+0.1151	2		+0.1217		+0.1217
$-n p_1 - C$	−0.8557			−0.8333		−0.8334
$-D$	+7.711	18		+7.025		+7.025
p_2'	+6.855		+6.855	+6.192		+6.192

(Fortsetzung).

0.14			0.15		
−0.879558			−0.871977		
− 4292			− 4256		
−0.92248			−0.91454		−0.9145
−1.2152		−1.2152	−1.1613		−1.1616
−0.2927		−0.2927	−0.2468		−0.2471
9.9870_n			9.9836_n		
9.9706			9.9610		
0.0164_n			0.0226_n		
7.4705			7.5696		
7.2676			7.3186		
0.2029			0.2510		
−1.2152			−1.1613		−1.1616
− 594			− 567		− 567
−1.2746			−1.2180		−1.2183
+1.0388	2		+1.0532	2	+1.0532
−0.2358			−0.1648		−0.1651
−1.5956	6		−1.7820	4	−1.7820
−1.8314		−1.8314	−1.9468		−1.9471
9.0763_n			9.0870_n		
9.9706			9.9610		
9.1057_n			9.1260_n		
8.0763_n			8.0870_n		
7.2676			7.3186		
0.8087_n			0.7684_n		
−0.8933			−0.8741		−0.8743
− 436			− 427		− 427
−0.9369			−0.9168		−0.9170
+0.1275	2		+0.1337	3	+0.1337
+0.8094			−0.7831		−0.7833
+6.437	15		+5.867		+5.867
+5.628		+5.628	+5.084		+5.084

Blatt III.

q_1	0.04		0.05		0.06		0.07	
$q_1' \times 0.01$	+0.005353	+0.006521	+0.006519	+0.007354	+0.007347	+0.007908	+0.007894	+0.008225
I	+0.000760	−0.000584	+ 583	− 418	+ 414	− 280	+ 274	− 166
II	−0.000128	+0.000029	− 147	+ 28	− 141	+ 22	− 117	+ 18
III	−0.000045	+0.000002	− 19	− 1	+ 6	− 3	+ 21	− 3
Δq_1	+0.005940	+0.005968	+0.006936	+0.006963	+0.007626	+0.007647	+0.008072	+0.008074
$q_1(t-\omega)$	−0.965520	−0.965520	−0.959552	−0.959552	−0.952589	−0.952589	−0.944942	−0.944942
$q_1(t)$	−0.959580	−0.959552	−0.952616	−0.952589	−0.944963	−0.944942	−0.936870	−0.936868
	0.08		0.09		0.10		0.11	
	+0.008219	+0.008381	+0.008375	+0.008403	+0.008407	+0.008355	+0.008353	+0.008234
	+ 162	− 81	+ 78	− 14	+ 16	+ 26	− 27	+ 60
	− 93	+ 14	− 70	+ 11	− 52	+ 7	− 36	+ 5
	+ 22	− 2	+ 20	− 2	+ 17	− 2	+ 14	− 1
	+0.008310	+0.008312	+0.008403	+0.008398	+0.008388	+0.008386	+0.008304	+0.008298
	−0.936868	−0.936868	−0.928556	−0.928556	−0.920158	−0.920158	−0.911772	−0.917772
	−0.928558	−0.928556	−0.920153	−0.920158	−0.911770	−0.911772	−0.903468	−0.903474
	0.12		0.13		0.14		0.15	
	+0.008235	+0.008075	+0.008075	+0.007886	+0.007887	+0.007680	+0.007680	+0.007460
	− 59	+ 80	− 80	+ 94	− 94	+ 104	− 104	+ 110
	− 27	+ 4	− 18	+ 2	− 12	+ 2	− 8	+ 1
	+ 8	− 1	+ 8	0	+ 5	0	+ 3	0
	+0.008157	+0.008158	+0.007985	+0.007982	+0.007786	+0.007786	+0.007571	+0.007571
	−0.903474	−0.903474	−0.895316	−0.895316	−0.887334	−0.887334	−0.879548	−0.879548
	−0.895317	−0.895316	−0.887331	−0.887334	−0.879558	−0.879548	−0.871977	−0.871977

Blatt III (Fortsetzung).

q_2	0.04		0.05		0.06		0.07	
$q_2' \times 0.01$	−0.01272	−0.011588	−0.011566	−0.010870	−0.010358	−0.009181	−0.009181	−0.008077
I	+ 49	− 570	+ 577	− 598	+ 604	− 588	+ 588	− 552
II	+ 18	− 13	+ 68	− $8._5$	+ 22	+ 3	− 13	+ 6
III	− 4	+ 6	− 61	+ 5	− 41	+ 4	− 32	+ 2
Δq_2	−0.01214	−0.012160	−0.010982	−0.010966	−0.009773	−0.009762	−0.008638	−0.008621
$q_2(t-\omega)$	−0.04185	−0.041850	−0.054010	−0.054010	−0.064976	−0.064976	−0.074738	−0.074738
$q_2(t)$	−0.05399	−0.054010	−0.064992	−0.064976	−0.074749	−0.074738	−0.083376	−0.083359
q_2	0.08		0.09		0.10		0.11	
$q_2' \times 0.01$	−0.008080	−0.007071	−0.007066	−0.006161	−0.006163	−0.005852	−0.005357	−0.004644
I	+ 550	− 504	+ 507	− 452	+ 452	− 406	+ 408	− 356
II	− 82	+ 8	− 36	+ 9	− 46	+ 8	− 41	+ 8
III	− 17	+ 1	− 4	+ 1	− 9	− 1	+ 5	0
Δq_2	−0.007579	−0.007566	−0.006599	+0.006603	−0.005766	−0.005751	−0.004990	−0.004992
$q_2(t-\omega)$	−0.083359	−0.083359	−0.090925	−0.090925	−0.097528	−0.097528	−0.103279	−0.103279
$q_2(t)$	−0.090938	−0.090925	−0.097524	−0.097528	−0.103294	−0.103279	−0.108269	−0.108271
q_2	0.12		0.13		0.14		0.15	
$q_2' \times 0.01$	−0.004641	−0.004001	−0.004005	−0.003488	−0.003486	−0.002927	+0.002927	−0.002468
I	+ 358	− 320	+ 318	− 284	+ 284	− 254	+ 254	− 230
II	− 37	+ 6	− 33	+ 6	− 28	+ 5	− 25	+ 4
III	+ 3	− 1	+ 3	0	+ 5	0	+ 3	0
Δq_2	−0.004317	−0.004316	−0.003717	−0.003716	−0.003175	−0.003176	−0.002695	−0.002694
$q_2(t-\omega)$	−0.108271	−0.108271	−0.112587	−0.112587	−0.116303	−0.116303	−0.119479	−0.119479
$q_2(t)$	−0.112588	−0.112587	−0.116304	−0.116303	−0.119478	−0.119479	−0.122174	−0.122173

Blatt III (Fortsetzung).

p_1	0.04		0.05		0.06		0.07	
$p_1' \times 0.01$	+0.1478	+0.1118	+0.11125	+0.07872	+0.07870	+0.05217	+0.05220	+0.03172
I	− 176	+ $182._5$	− 1828	+ 1626	− 1622	+ 1326	− 1325	+ 1024
II	− 86	+ $1._2$	− 60	− 34	+ 171	− 49	+ 248	− 50
III	+ 30	− $3._0$	+ 269	− 23	+ 208	− 8	+ 69	− 0
Δp_1	+0.1296	+0.1294	+0.09506	+0.09441	+0.06627	+0.06486	+0.04212	+0.04146
$p_1(t-\omega)$	+0.5791	+0.5791	+0.7085	+0.7085	+0.8029	+0.8029	+0.8678	+0.8678
$p_1(t)$	+0.7087	+0.7085	+0.8036	+0.8029	+0.8692	+0.8678	+0.9099	+0.9093
	0.08		0.09		0.10		0.11	
	+0.03178	+0.01607	+0.01608	+0.00476	+0.00477	−0.003423	−0.00348	−0.00929
	− 1021	+ 786	− 785	+ 566	− 566	+ 410	− 410	+ 293
	+ 253	− 39	+ 197	− 36	+ 183	− 26	+ 130	− 19
	+ 5	+ 6	− 51	+ 1	− 12	+ 5	− 48	+ 3
	+0.02415	+0.02360	+0.00969	+0.01007	+0.00082	+0.00047	−0.00671	−0.00652
	+0.9093	+0.9093	+0.9329	+0.9329	+0.9431	+0.9431	+0.9436	+0.9436
	+0.9335	+0.9329	+0.9426	+0.9430	+0.9438	+0.9436	+0.9369	+0.9371
	0.12		0.13		0.14		0.15	
	−0.00928	−0.01340	−0.01340	−0.01627	−0.01627	−0.01881	−0.01881	−0.01947
	− 292	+ 206	− 206	+ 144	− 143	+ 102	− 102	+ 58
	+ 98	− 14	+ 72	− 10	+ 52	− 7	+ 34	− 8
	− 28	+ 2	− 21	+ 2	− 18	+ 2	− 22	0
	−0.01150	−0.01146	−0.01495	−0.01491	−0.01786	−0.01784	−0.01921	−0.01897
	+0.9371	+0.9371	+0.9256	+0.9256	+0.9107	+0.9107	+0.8933	+0.8933
	+0.9256	+0.9256	+0.9106	+0.9107	+0.8983	+0.8983	+0.8741	+0.8743

Blatt III (Fortsetzung).

p_2	0.04		0.05		0.06		0.07	
$p_2' \times 0.01$	+0.1150	+0.12673	+0.12676	+0.12791	+0.12807	+0.12269	+0.12276	+0.11895
I	+ 129	− 586	+ 588	− 58	+ 66	+ 269	− 266	+ 440
II	− 58	+ 117	− 588	+ 88	− 485	+ 56	− 276	+ 29
III	− 18	− 1	+ 7	− 14	+ 183	− 16	+ 144	− 18
Δp_2	+0.1203	+0.12203	+0.12688	+0.12807	+0.12571	+0.12578	+0.11878	+0.11851
$p_2(t-\omega)$	−2.2850	−2.2850	−2.1630	−2.1630	−2.0849	−2.0849	−1.9091	−1.9091
$p_2(t)$	−2.1647	−2.1630	−2.0861	−2.0849	−1.9092	−1.9091	−1.7903	−1.7906
	0.08		0.09		0.10		0.11	
	+0.11410	+0.10418	+0.10412	+0.09425	−0.09425	+0.08467	+0.08465	+0.07616
	− 483	+ 498	− 499	+ 494	− 494	+ 479	− 480	+ 424
	− 140	+ 11	− 55	− 1	+ 5	− 2	+ 11	− 9
	+ 123	− 8	+ 76	− 6	+ 54	− 1	+ 6	− 4
	+0.10960	+0.10914	+0.09934	+0.09912	+0.08990	+0.08948	+0.08002	+0.08027
	−1.7906	−1.7906	−1.6805	−1.6805	−1.5814	−1.5814	−1.4920	−1.4920
	−1.6810	−1.6805	−1.5812	−1.5814	−1.4915	−1.4920	−1.4120	−1.4117
	0.12		0.13		0.14		0.15	
	+0.07615	+0.06855	+0.06855	+0.06192	+0.06192	+0.05628	+0.05628	+0.05084
	− 425	+ 380	− 380	+ 332	− 332	+ 282	− 282	+ 272
	+ 46	− 8	+ 38	− 8	+ 40	− 8	+ 41	− 2
	+ 31	+ 1	− 8	0	+ 3	0	+ 1	+ 3
	+0.07267	+0.07228	+0.06505	+0.06516	+0.05908	+0.05902	+0.05888	+0.05357
	−1.4117	−1.4117	−1.3394	−1.3394	−1.2742	−1.2742	−1.2152	−1.2152
	−1.3390	−1.3394	−1.2744	−1.2742	−1.2152	−1.2152	−1.1613	−1.1616

Das Integral (9) liefert eine Controlle, die zwar nicht vollständig ist, aber doch eine erhöhte Sicherheit in der Rechnung giebt. Die Werthe der Constanten C — die gleich 3.950 sein soll — für die obigen Intervalle sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich.

Controlle.

t	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15
$\log q_1'$	9.8142	9.8661	9.8978	9.9148	9.9229	9.9247	9.9219	9.9156	9.9071	9.8969	9.8854	9.8728
$\log q_1'^2$	9.6284	9.7332	9.7946	9.8296	9.8458	9.8494	9.8438	9.8312	9.8142	9.7938	9.7708	9.7456
$\log q_2'$	0.0632	0.0152	9.9628	9.9074	9.8492	9.7898	9.7290	9.6666	9.6062	9.5361	9.4664	9.3929
$\log q_2'^2$	0.1264	0.0304	9.9256	9.8148	9.6984	9.5796	9.4580	9.3332	9.2124	9.0722	8.9328	8.7858
$q_1'^2$	0.4250	0.540	0.6231	0.6755	0.7012	0.7069	0.6979	0.6779	0.6519	0.6220	0.5899	0.5567
$q_2'^2$	1.3382	1.073	0.8425	0.6528	0.4993	0.3798	0.2871	0.2154	0.1631	0.1181	0.0857	0.0611
v^2	1.7682	1.613	1.4656	1.3283	1.2005	1.0867	0.9850	0.8933	0.8150	0.7401	0.6756	0.6178
$\log \varrho_1$	0.0220	0.0184	0.0164	0.0132	0.0102	0.0068	0.0034	0.0002	9.9968	9.9934	9.9902	9.9870
$\log \frac{2}{\varrho_1}$	0.2790	0.2816	0.2846	0.2878	0.2908	0.2942	0.2976	0.3008	0.3042	0.3076	0.3108	0.3140
$\log \varrho_2$	8.8688	8.8931	8.9185	8.9438	8.9685	8.9918	9.0143	9.0352	9.0548	9.0730	9.0892	9.1062
$\log \frac{2\mu}{\varrho_2}$	0.4322	0.4079	0.3825	0.3572	0.3325	0.3092	0.2867	0.2658	0.2462	0.2280	0.2118	0.1948
$\frac{2}{\varrho_1}$	1.901	1.912	1.926	1.940	1.953	1.969	1.984	1.999	2.015	2.030	2.045	2.061
$\frac{2\mu}{\varrho_2}$	2.706	2.558	2.412	2.276	2.150	2.038	1.934	1.844	1.763	1.690	1.628	1.566
ϱ_1^2	1.106	1.093	1.079	1.063	1.048	1.032	1.016	1.001	0.986	0.970	0.956	0.942
$\mu \varrho_2^2$	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002
2Ω	5.714	5.564	5.418	5.280	5.152	5.040	4.935	4.845	4.765	4.691	4.630	4.571
v^2	1.763	1.613	1.466	1.328	1.200	1.087	0.985	0.893	0.815	0.740	0.676	0.618
C	3.951	3.951	3.952	3.952	3.952	3.953	3.950	3.952	3.950	3.951	3.954	3.953

Die Uebereinstimmung ist also eine befriedigende.

NEUNTER ABSCHNITT

PERIODISCHE LÖSUNGEN

§ I. Strenge Lösungen des Problems der drei Körper.

Obgleich es bis jetzt nicht gelungen ist, die Integrale des Problems der Körper in ihrer Allgemeinheit kennen zu lernen, sind indessen seit langer Zeit gewisse Configurationen der drei Körper bekannt, für welche die Lösungen streng erhalten werden können. Diese Lösungen, welche von LAGRANGE in einer seiner schönsten Abhandlungen gefunden wurden, scheinen beim ersten Blick nur von oberflächlichem Interesse zu sein.[1] Verschiedene Untersuchungen haben indessen gezeigt, dass sie von der grössten Bedeutung für das allgemeine Problem sind, und dass sie wahrscheinlich in engem Zusammenhang mit den wesentlichen Singularitäten der Integrale stehen. Diese LAGRANGE'schen Lösungen bilden den Ausgangspunkt einer Gattung periodischer Lösungen des Problems der drei Körper, und sie können selbst als die einfachsten periodischen Lösungen dieses Problems betrachtet werden. Es ist deswegen angemessen, diesen Abschnitt mit diesen strengen Lösungen des Problems der drei Körper einzuleiten.

Bei der Ableitung der LAGRANGE'schen Lösungen werde ich der von LAPLACE in seiner „Mécanique Céleste" Tome IV gegebenen Methode folgen. Sie steht zwar der LAGRANGE'schen Methode nach, insofern sie zum Theil auf geometrischen Betrachtungen beruht. Gerade hierdurch giebt sie aber einen guten Einblick in die mechanischen Grundbedingungen dieser Lösungen, und wir werden später Gelegenheit haben, die singulären Punkte der LAGRANGE'schen Lösungen in analytischer Weise wiederzufinden.

LAPLACE geht von der Bemerkung aus, dass man unter den folgenden Bedingungen offenbar zu einer strengen und einfachen

---

[1] LAGRANGE sagt selbst (Oeuvres VI, 280): „cette recherche n'est à la vérité que de pure curiosité."

Lösung des Problems der n Körper gelangen würde. Angenommen, dass die n Körper im Anfang in einer Ebene so geordnet seien, dass die Resultante der auf jede Masse wirkenden Kräfte durch den gemeinsamen Schwerpunkt — G — des ganzen Systemes geht; wenn weiter diese Resultante, ihrer Grösse nach, dem Abstande von G proportional ist, so ist klar, dass die Massen immer in derselben gegenseitigen Lage bleiben werden, wenn man dem ganzen System eine Rotation um G giebt, von solcher Grösse, dass die durch diese Rotation entstandene Centrifugalkraft gleich der betreffenden Resultante werde.

Aus einer geometrischen Betrachtung, die weiter unten auseinandergesetzt wird, findet man, dass ein ähnlicher Gleichgewichtszustand entsteht, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten der Massen eine schiefe Richtung im Verhältniss zu den Verbindungslinien mit dem Schwerpunkt haben, wenn sie nur sämmtlich denselben Winkel mit diesen Linien bilden, und der Grösse nach dem Abstand von G proportional sind. Die Configuration der Massen bleibt auch in diesem Falle dieselbe, nur die Dimensionen werden sich ändern.

Es fragt sich, welche Anordnung der Massen hierfür erforderlich ist.

Wir nehmen an, dass es sich um drei Körper mit den Massen m, m', m'' handelt. Ihre rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf ein durch G gelegtes Coordinatensystem seien x, y; x', y'; x'', y''. Ihre Abstände von G bezeichnen wir mit r, r' und r'', und ihre gegenseitigen Entfernungen mit s, s' und s'', so dass

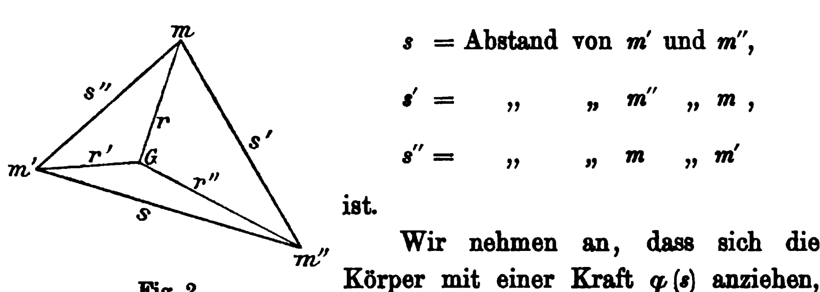


Fig. 2.

s = Abstand von m' und m'',

s' = „ „ m'' „ m,

s'' = „ „ m „ m'

ist.

Wir nehmen an, dass sich die Körper mit einer Kraft $\varphi(s)$ anziehen, die eine Function der gegenseitigen Entfernung s ist. Die Beschleunigungen der Massen m, m', m'' parallel der X-Achse seien X, X' und X'', dann ist

$$(1)\quad \begin{cases} X = m' \dfrac{\varphi(s'')}{s''}(x'-x) + m'' \dfrac{\varphi(s')}{s'}(x''-x), \\ X' = m'' \dfrac{\varphi(s)}{s}(x''-x') + m \dfrac{\varphi(s'')}{s''}(x-x'), \\ X'' = m \dfrac{\varphi(s')}{s'}(x-x'') + m' \dfrac{\varphi(s)}{s}(x'-x''), \end{cases}$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man für die Beschleunigungen Y, Y', Y'' parallel der Y-Achse.

Wenn die Resultante der auf m, m' und m'' wirkenden Kräfte durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen soll, so ist

$$(2)\quad \begin{cases} X = K x, & Y = K y, \\ X' = K' x', & Y' = K' y', \\ X'' = K'' x'', & Y'' = K'' y''. \end{cases}$$

Die Grösse der Resultanten ist bez.

$$K\sqrt{x^2+y^2}, \qquad K'\sqrt{x'^2+y'^2} \qquad K''\sqrt{x''^2+y''^2},$$

und wenn sie den Abständen von G proportional angenommen werden, so muss

$$(2^*)\qquad K = K' = K''$$

sein.

Die Gleichung (1) giebt

$$(3)\qquad 0 = mx + m'x' + m''x'',$$

die übrigens aus der Eigenschaft des Schwerpunktes folgt.

Wenn man mittelst (3) x'' aus der ersten Gleichung (1) eliminirt, so erhält man, unter Berücksichtigung von (2)

$$(4)\qquad -Kx = x\left(m'\frac{\varphi(s'')}{s''} + (m+m'')\frac{\varphi(s')}{s'}\right) + m'x'\left(\frac{\varphi(s')}{s'} - \frac{\varphi(s'')}{s''}\right).$$

Für die y-Coordinaten erhält man die ähnliche Gleichung

$$(4^*)\qquad -Ky = y\left(m'\frac{\varphi(s'')}{s''} + (m+m'')\frac{\varphi(s')}{s'}\right) + m'y'\left(\frac{\varphi(s')}{s'} - \frac{\varphi(s'')}{s''}\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass

$$(5) \qquad x : x' = y : y',$$

wenn nicht

$$(6) \qquad \frac{\varphi(s')}{s'} - \frac{\varphi(s'')}{s''} = 0,$$

also auch

$$(6^*) \qquad m' \frac{\varphi(s'')}{s''} + (m + m'') \frac{\varphi(s')}{s'} = 0$$

ist, welche Gleichungen gleichzeitig bestehen.

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, dass die Relation (6) stattfindet. Sie ist befriedigt, wenn

$$s' = s'',$$

woraus nach (4)

$$(7) \qquad -K = (m + m' + m'') \frac{\varphi(s')}{s'}.$$

Die übrigen Gleichungen (1) geben den nämlichen Werth für K unter Voraussetzung, dass

$$(8) \qquad s = s' = s''.$$

Die Verbindungslinien zwischen den drei Massen bilden also ein gleichseitiges Dreieck.

Die Beschleunigungen der drei Massen sind

$$Kr, \quad Kr', \quad Kr'',$$

wo K durch (7) gegeben ist.

Zwischen den Seiten s, s', s'' eines Dreiecks und den Abständen r, r', r'' vom Schwerpunkt bestehen die Relationen

$$(9) \begin{cases} (m + m' + m'')^2 r^2 = -m' m'' s^2 + (m' + m'')(m'' s'^2 + m' s''^2), \\ (m + m' + m'')^2 r'^2 = -m'' m\, s'^2 + (m'' + m\,)(m\, s''^2 + m'' s^2\,), \\ (m + m' + m'')^2 r''^2 = -m\, m' s''^2 + (m\, + m')(m' s^2 + m\, s'^2), \end{cases}$$

die aus den Eigenschaften des Schwerpunktes leicht abgeleitet werden.

Wenn

$$s = s' = s'',$$

so ist also

$$s = \frac{m + m' + m''}{\sqrt{m'^2 + m' m'' + m''^2}} r \tag{10}$$

und nach (7) wird der Ausdruck für die Beschleunigung der Masse m

$$rK = -\sqrt{m'^2 + m' m'' + m''^2}\, \varphi \left[\frac{m + m' + m''}{\sqrt{m'^2 + m' m'' + m''^2}} r\right].$$

In dem in der Natur vorkommenden Fall hat man

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^2}$$

und also

$$rK = -\frac{(m'^2 + m' m'' + m''^2)^{3/2}}{(m + m' + m'')^2 r^2}. \tag{11}$$

Die Bewegung geht also so vor sich, als ob jede Masse von dem Schwerpunkt mit einer Kraft angezogen würde, die dem Quadrate des Abstandes vom Schwerpunkte umgekehrt proportional wäre. Jede Masse beschreibt also einen Kegelschnitt, dessen Brennpunkt im Schwerpunkte liegt. Die Abstände zwischen den drei Massen bilden immer ein gleichseitiges Dreieck, und wenn die Kegelschnitte Parabeln oder Hyperbeln sind, so können die Abstände ins Unendliche wachsen.

Diese ist die erste der von Lagrange gefundenen strengen Lösungen des Problems der drei Körper.

Wenn nicht $s = s' = s''$, so ist nach (5)

$$x : x' = y : y',$$

so dass m und m' auf einer durch den Schwerpunkt gehenden Geraden liegen. *Die drei Massen liegen dann auf einer geraden Linie.*

Ihre Lagen können aber nicht beliebig auf dieser Linie gewählt werden. Wenn der Abstand zwischen zwei der Massen bestimmt ist, dann kann die Lage der dritten Masse nicht willkürlich gewählt werden.

Wir nehmen an, dass die Körper in der Reihenfolge m, m', m'' auf der geraden Linie liegen. Setzen wir

$$x' = -\mu x, \quad x'' = -\nu x,$$

so ist ν nothwendigerweise eine positive Zahl, wogegen μ positiv oder negativ ist. Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} s &= (\nu - \mu) r, \\ s' &= (1 + \nu) r, \\ s'' &= (1 + \mu) r. \end{aligned}$$

Werden diese Werthe in (1) eingesetzt, so bekommt man

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= -m' \frac{\varphi(s'')}{s''}(1+\mu) - m'' \frac{\varphi(s')}{s'}(1+\nu), \\ -\mu K &= -m'' \frac{\varphi(s)}{s}(\nu - \mu) + m \frac{\varphi(s'')}{s''}(1+\mu), \\ -\nu K &= m \frac{\varphi(s')}{s'}(1+\nu) + m' \frac{\varphi(s)}{s}(\nu - \mu), \end{aligned} \right.$$

Die Relation (3) lautet

$$(13) \qquad m - m'\mu - m''\nu = 0.$$

Ist

$$\varphi(s) = s^n,$$

so hat man

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= -m'(1+\mu)^n r^{n-1} - m''(1+\nu)^n r^{n-1}, \\ -\mu K &= -m''(\nu - \mu)^n r^{n-1} + m(1+\mu)^n r^{n-1}, \\ -\nu K &= m(1+\nu)^n r^{n-1} + m'(\nu-\mu)^n r^{n-1}. \end{aligned} \right.$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit $(\mu + \nu)$ multiplicirt, und addirt man die Gleichungen, erhält man, nachdem durch r^{n-1} dividirt worden ist, unter Berücksichtigung von (13)

$$(15) \qquad 0 = (m' - m'')[-\nu(1+\mu)^n + \mu(1+\nu)^n + (\nu - \mu)^n].$$

Es ist also entweder

$$m' - m'' = 0, \tag{16}$$

oder

$$0 = -\nu(1+\mu)^n + \mu(1+\nu)^n + (\nu-\mu)^n, \tag{17}$$

von welchen Gleichungen indessen nur (17) eine unabhängige Lösung giebt.

Wir setzen mit LAPLACE

$$\nu - \mu = (1+\mu)z,$$

so dass

$$1 + \nu = (1+\mu)(1+z),$$

und nach (13)

$$1+\mu = \frac{m+m'+m''}{m'+m''(1+z)}, \quad 1+\nu = \frac{(m+m'+m'')(1+z)}{m'+m''(1+z)}.$$

Wird ausserdem angenommen, dass die Anziehung der Massen nach dem Gesetz von NEWTON geschieht, so dass $n = -2$ ist, so bekommt man für z die folgende Gleichung

$$0 = -mz^2[(1+z)^3 - 1] + m'(1+z)^2(1-z^3) + m''[(1+z)^3 - z^3], \tag{18}$$

eine Gleichung fünften Grades, die wenigstens eine reelle und positive Wurzel besitzt.[1] Dieser Wurzel entspricht immer ein positiver Werth von ν, da nämlich

$$\nu = \frac{m+(m+m')z}{m'+m''(1+z)}$$

ist, wogegen μ negativ ausfallen kann, weil

$$\mu = \frac{m-m''z}{m'+m''(1+z)}$$

ist, und also ein negativer Werth für μ einem positiven Werth für z entsprechen kann.

---

[1] Ich werde unten zeigen, dass diese Gleichung eine einzige reelle Wurzel besitzt.

Wird μ negativ, so liegt der Schwerpunkt zwischen m' und m''.

Wir haben also den folgenden Satz gefunden:

Drei Körper mit willkürlichen Massen — m, m' und m'' — seien gegeben. Die Massen m und m'' werden in einen beliebigen Abstand von einander gebracht. Dann giebt es auf der geraden Linie zwischen m und m'' immer eine bestimmte Lage für m', die einer strengen Lösung des Problems der drei Körper entspricht. Sind die Massen von verschiedener Grösse, so hat man also immer *drei* verschiedene Configurationen, die einer strengen Lösung entsprechen, je nachdem man die grösste, oder die kleinste oder die dritte Masse in die Mitte legt.

Die von den drei Massen beschriebenen Bahnen werden auch in diesem Falle Kegelschnitte, welche im Schwerpunkt ihren Brennpunkt haben.

Wir werden in den folgenden Paragraphen Gelegenheit haben, diese Lösungen näher zu untersuchen.

Es wurde zu Anfang dieses Paragraphen nach Laplace behauptet, dass es für die Entstehung einer strengen Lösung nicht nothwendig ist, dass der ursprüngliche Stoss senkrecht zur Verbindungslinie zwischen der Masse und dem Schwerpunkt stattfände, sondern dass es hinreichend ist, dass die Anfangsgeschwindigkeiten der verschiedenen Massen *denselben* Winkel mit dieser Linie bilden, wenn nur die Grösse dieser Anfangsgeschwindigkeiten dem Abstande vom Schwerpunkte proportional ist. Da die Richtigkeit dieser Behauptung nicht unmittelbar einleuchtet, so werde ich den Beweis ausführen.

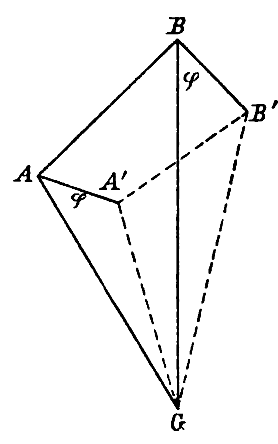


Fig. 3.

Es seien A und B die ursprünglichen Lagen zweier Massen, G der gemeinsame Schwerpunkt des ganzen Systems. Es wird angenommen:

1) dass die Grössen der Resultanten der auf A und B wirkenden Kräfte sich wie die Abstände $AG : BG$ verhalten;

2) dass die Anfangsgeschwindigkeiten AA' und BB' in demselben Verhältnisse ($AG:BG$) zu einander stehen; und

3) dass der Winkel $A'AG$ gleich dem Winkel $B'BG$ ist.

Nach einem Zeitmoment nehmen die Körper A und B die Lage A' und B' ein. Wir finden, dass die beiden Dreiecke ABG und $A'B'G$ einander ähnlich sind. Es ist in der That nach der Annahme

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} A'A:AG = B'B:BG, \\ \wedge A'AG = \wedge B'BG. \end{cases}$$

Die beiden Dreiecke $A'AG$ und $B'BG$ sind also ähnlich und folglich ist:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} AG:BG = A'G:B'G, \\ \wedge AGA' = \wedge BGB', \end{cases}$$

folglich ist auch

$$\wedge AGB = \wedge A'GB',$$

und unter Berücksichtigung von (b) finden wir also, dass die Dreiecke ABG und $A'B'G$ einander ähnlich sind. Hieraus folgt aber, dass die von den Massen gebildete Configuration nach einem Zeitmoment der ursprünglichen Configuration ähnlich ist. Nur der Massstab hat sich geändert.

In dem zweiten Zeitmoment spielen die wirkenden Kräfte mit ein; da indessen die Grössen der Resultanten in dem Verhältnisse $A'G:B'G$ zu einander stehen, so werden die Voraussetzungen 2) und 3) noch Gültigkeit behalten und das von den Massen gebildete Polygon wird immer sich selbst ähnlich bleiben. W. z. b. w.

Es lässt sich beweisen, dass die Gleichung (18) von LAGRANGE *eine einzige reelle* — und zwar positive — *Wurzel besitzt.*

Zu dem Zweck ordnen wir die Glieder nach fallenden Potenzen von z. Die Gleichung lautet dann

$$(18^*) \quad \begin{cases} 0 = (m + m')z^5 + (3m + 2m')z^4 + (3m + m')z^3 - \\ \qquad - (m' + 3m'')z^2 - (2m' + 3m'')z - (m' + m''). \end{cases}$$

Diese Gleichung enthält einen einzigen Zeichenwechsel und vier Zeichenfolgen und nach dem Theorem von DESCARTES hat die Gleichung also höchstens eine positive Wurzel und höchstens vier negative Wurzeln. Sie kann aber keine negative Wurzel besitzen. Wird nämlich in (18) z gegen $-u$ vertauscht, so lautet die Gleichung

$$18^{**})\quad 0 = m\,u^2\left[1-(1-u)^3\right] + m'(1-u)^2(1+u^3) + m''\left[1-u)^3 + u^3\right],$$

und die Coefficienten von m, m' und m'' rechter Seite dieser Gleichung sind immer positiv für positive u-Werthe.

Die Gleichung (18) hat also eine einzige, und zwar positive Wurzel.

Es existirt also, wenn die Reihenfolge der drei Massen auf einer geraden Linie gegeben ist, und man für den Abstand zwischen den äussersten Massen einen bestimmten Werth gewählt hat, eine einzige Lage für den mittleren Körper, die einer strengen LAGRANGE'schen Lösung des Problems der drei Körper entspricht. Wird die Reihenfolge der Massen geändert, erhält man drei, im Allgemeinen verschiedene, Lösungen.

Diejenigen Punkte, in denen eine LAGRANGE'sche strenge Lösung des Problems der drei Körper vorkommt, wollen wir mit GYLDÉN *Librationscentra* nennen.

Für die Anwendung dieser Sätze auf das Planetensystem sind besonders diejenigen Fälle von Interesse, in denen eine Masse die übrigen an Grösse bedeutend übertrifft. Wir wollen die Lage der Librationscentra in diesem Falle untersuchen.

Wir nehmen an, dass die drei Massen immer in der Reihenfolge m, m', m'' liegen. Es können nun zwei Fälle vorkommen:

1) entweder, dass die grosse Masse die äusserste ist; oder

2) dass sie in der Mitte zwischen den beiden kleinen Massen liegt.

Im ersteren Falle können wir m sehr gross, m' und m'' klein annehmen. Aus (18*) geht unmittelbar hervor, dass die Gleichung eine kleine positive Wurzel besitzt, deren Werth genähert durch die Formel

19)
$$z = \sqrt[3]{\frac{m' + m''}{3m}}$$

gegeben wird. Hieraus folgt, dass die Massen m' und m'' genähert die folgenden Abstände vom Schwerpunkte haben

$$r' = \frac{m}{m' + m''} r$$

$$r'' = \frac{m}{m' + m''} (1 + z) r ,$$

so dass

(20)
$$r'' - r' = r' \sqrt[3]{\frac{m' + m''}{3m}} ,$$

oder mit demselben Grad von Annäherung

(20*)
$$r'' - r' = r'' \sqrt[3]{\frac{m' + m''}{3m}} .$$

Die Librationscentra für m' und m'' liegen also einander sehr nahe.

Nehmen wir zweitens an, dass die grosse Masse in der Mitte liegt, so dass m' gross ist, so hat (18) eine Wurzel, welche der Einheit nahe ist. Setzen wir

$$z = 1 + y$$

in (18) ein und entwickeln nach Potenzen von y, so lautet diese Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = &- m\ (1 + 2y + y^2)(7 + 12y + 6y^2 + y^3) + \\ &- m'\ (4 + 4y + y^2)(3y + 3y^2 + y^3) + \\ &+ m''(7 + 9y + 3y^2) , \end{aligned}$$

und wenn man in Betracht zieht, dass m' sehr gross ist im Verhältniss zu m und m'', so findet man, dass diese Gleichung eine

Wurzel hat, die sehr klein ist, und deren Werth genähert durch den Ausdruck

$$y = -\frac{7(m - m'')}{12\, m'} \tag{21}$$

gegeben ist.

Die hieraus sich ergebenden Werthe für μ und ν sind

$$\mu = \frac{m - m''}{m'},$$

$$\nu = 1 + \frac{17}{12}\,\frac{m - m''}{m'},$$

und die Abstände zwischen den drei Massen:

$$s \;= \left(1 + \frac{5}{12}\,\frac{m - m''}{m'}\right) r,$$

$$s' \;= \left(2 + \frac{17}{12}\,\frac{m - m''}{m'}\right) r,$$

$$s'' = \left(1 + \frac{m - m''}{m'}\right) r.$$

Wir können immer annehmen, dass

$$m > m'',$$

wenn die beiden Massen nicht gerade gleich gross sind, in welchem Falle sich die beiden Massen, wenn sie in den Librationscentren liegen, sich in gleichem Abstande von m' befinden. In den obigen Formeln bedeutet r den Abstand des Schwerpunktes von m. Der Abstand der grösseren Masse von m' ist gleich s'', und für den Abstand — s — der kleineren Masse von m' bekommen wir den Werth

$$s = \left(1 - \frac{7}{12}\,\frac{m - m''}{m'}\right) s''. \tag{22}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass die eine von den

kleinen Massen verschwindend klein ist, so dass man sie ohne merkbaren Fehler gleich Null setzen kann. Wir wollen die sehr grosse Masse mit M und die kleinere, aber endliche Masse mit m bezeichnen. Weiter bedeute a den Abstand zwischen M und m, und b den Abstand zwischen M und der unendlich kleinen Masse. Aus (20), (20*) und (22) erhalten wir dann die folgenden Werthe für b:

$$(23)\qquad \begin{cases} b_1 = a\left(1 - \sqrt[3]{\dfrac{m}{3M}}\right), \\ b_2 = a\left(1 + \sqrt[3]{\dfrac{m}{3M}}\right), \\ b_3 = a\left(1 - \dfrac{7}{12}\dfrac{m}{M}\right). \end{cases}$$

Die drei durch diese Formeln bestimmten Librationscentra werde ich mit L_1, L_2 und L_3 bezeichnen. Ihre Lagen sind aus der nachstehenden Figur ersichtlich:

Lage der Librationscentra.

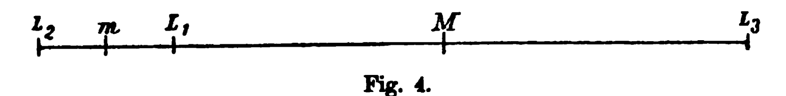


Fig. 4.

Wenn man nur die Anziehung der Sonne und *eines* Planeten in Betracht zieht, so gehören also zu jedem Planeten im Sonnensystem drei Librationscentra, welche die Eigenschaft besitzen, dass ein kleines Partikelchen — z. B. ein Meteor —, das sich in einem dieser Librationscentra befände und eine passende Anfangsgeschwindigkeit besässe, durch die Anziehung der Sonne und des betreffenden Planeten für immer eine Ellipse um die Sonne beschreiben würde, und zwar so, dass dies Partikelchen immer auf der durch die Sonne und den Planeten gehenden Geraden bleiben würde.

In unserem Planetensystem haben die Librationscentra der verschiedenen Planeten folgende Lage:

Librationscentra im Planetensystem.

Abstände von der Sonne.

	L_1	L_2	L_3
Mercur	0.9966	1.0034	1 − 0.00000007
Venus	0.9907	1.0093	1 − 0.00000143
Erde	0.9899	1.0101	1 − 0.00000178
Mars	0.9952	1.0048	1 − 0.00000019
Jupiter	0.9332	1.0698	1 − 0.000557
Saturn	0.9550	1.0464	1 − 0.000167
Uranus	0.9758	1.0246	1 − 0.000026
Neptun	0.9743	1.0261	1 − 0.000030

Die Abstände sind im mittleren Abstand des Hauptplaneten von der Sonne als Einheit ausgedrückt.

Die Librationscentra L_1 und L_2 liegen bei allen Planeten — vom Planeten aus gerechnet — *ausserhalb* der bekannten Satelliten des Planeten. Bei der Erde liegen L_1 und L_2 auf ungefähr dem vierfachen Abstande des Erdmondes von der Erde. Wir werden im einem folgenden Paragraphen finden, dass die Lage der Librationscentra in engem Zusammenhang mit der Stabilität der Bewegung steht.

§ 2. Periodische Lösungen in der Nähe der Librationscentra.

Die allgemeinen Integrale des Problems der drei Körper mit der genügenden Zahl willkürlicher Constanten sind zwar bis jetzt nicht bekannt, dagegen hat man verschiedene partikuläre Integrale gefunden, welche eine geringere Zahl willkürlicher Constanten enthalten. Unter diesen haben die periodischen Integrale in der letzten Zeit eine grosse Rolle gespielt, und mit ihrer Hilfe hat das Studium des Drei-Körperproblems in neue Bahnen eingelenkt, die Vieles vom grössten theoretischen Interesse ergeben haben. Die Untersuchungen dieser Bahnen sind schon so weit entwickelt worden,

dass sich auch für die numerischen Berechnungen der Bahnen der Himmelskörper neue Horizonte geöffnet haben.

Die periodischen Lösungen wurden in die Astronomie von G. W. Hill eingeführt in einer schönen Reihe von Abhandlungen, die im ersten Band (1878) des „American Journal of Mathematics" veröffentlicht wurden.[1] Man findet in diesen Aufsätzen den ersten Ursprung vieler der wichtigsten Untersuchungen in der Astronomie in den letzten Jahrzehnten. Wir werden im Folgenden öfters Gelegenheit haben, auf diese grundlegende Arbeit von Hill zurückzukommen.

Die allgemeine Theorie der periodischen Lösungen ist später von Poincaré, unter Anwendung der gewaltigen mathematischen Hilfsmittel, die ihm zu Gebote stehen, entwickelt worden, zuerst in seiner Stockholmer Preisschrift vom Jahre 1889: „Sur le probleme des trois corps et les équations de la dynamique", und dann ausführlich in seinem classischen Werke „Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste".

Die periodischen Bahnen sind dadurch charakterisirt, dass die Körper nach einer gewissen Zeit zu einer einmal eingenommenen Configuration wiederkehren. Es ist angemessen, sie in zwei Classen zu theilen. In der ersten Classe bleiben die Veränderungen der von den Körpern eingenommenen Configuration immer unendlich klein, in der zweiten sind sie endlich. Die periodischen Bahnen der zweiten Classe können im Allgemeinen durch jeden beliebigen Punkt der Ebene oder eines continuirlichen Gebietes der Ebene gelegt werden Die periodischen Bahnen der ersten Classe können dagegen nur bei ganz bestimmten Configurationen der Körper auftreten.

Die Bahnen der letzteren (ersten) Classe sind leichter analylytisch aufzusuchen und zu behandeln. Wir werden deswegen die Untersuchung über die periodischen Bahnen mit dieser Classe einleiten.

Ich werde mich dabei auf einen besonderen Specialfall des Problems der drei Körper beschränken, denjenigen nämlich, in

---

[1] G. W. Hill, Researches in the lunar theory. (Communicated to the National Academy of Sciences at the session of April, 1877).

welchem eine von den drei Massen *verschwindend klein* ist und ausserdem die beiden endlichen Massen sich in einem *Kreis* um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Die Bewegung dieser beiden Körper, die von dem unendlich kleinen Körper nicht beeinflusst wird, muss dann mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich gehen.

Dieser Fall, den wir mit dem Namen *„das asteroidische Drei-Körperproblem“* bezeichnen wollen,[1] hat für die Astronomie grosse Bedeutung, da die Theorie der kleinen Planeten, deren Vollendung immer noch das dringendste Bedürfniss der praktischen Astronomie ist, wesentlich auf der Lösung dieses Problems beruht.

Die beiden endlichen Körper bezeichnen wir mit m_1 und m_2, den unendlich kleinen Körper — den Asteroiden (Planetoiden) — mit P. Die Masse von m_1 nehmen wir als Einheit der Massen an, m_2 hat die Masse μ. Wir nehmen an, dass wir unsere Wahl so getroffen haben, dass μ ein echter Bruch, oder gleich der Einheit ist.

Es seien r_1 und r_2 die Abstände der Körper m_1 und m_2 vom gemeinsamen Schwerpunkt G, und wir nehmen den Abstand zwischen m_1 und m_2 als Einheit für die Längen an. Wir haben also

$$\left\{\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 1, \\ r_1 - \mu r_2 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Die Einheit für die Zeit wird so gewählt, dass die Gravitationsconstante gleich Eins ist. Die Zeit T eines Umlaufes von m_1 und m_2 um G ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}}, \tag{2}$$

und die Winkelgeschwindigkeit n dieser Bewegung ist also

$$n = \sqrt{1+\mu}. \tag{2*}$$

[1] Er wird von den Franzosen bisweilen mit dem Namen „Le Problème restreint“ bezeichnet.

Wir nehmen endlich an, dass der Asteroid sich in der durch die Bewegung von m_1 und m_2 bestimmten Ebene bewegt.

Als Anfangspunkt der Coordinaten wird der Schwerpunkt G gewählt. Die Coordinaten x und y von P werden auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, das sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit n dreht; die X-Achse ist gegen m_1 gerichtet, und die positive Y-Achse bildet mit ihr einen Winkel von 90^0 in der Richtung der Bewegung.

In I § 7 (21) haben wir für die Bewegung von P die folgenden Differentialgleichungen abgeleitet:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2n\dfrac{dy}{dt} - n^2x = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2n\dfrac{dx}{dt} - n^2y = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \end{cases}$$

wo

$$U = \frac{1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x+r_2)^2+y^2}}$$

ist; wenn wir die Abstände zwischen m und m_1 und m_2 mit ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnen, so dass

$$(4)\qquad \begin{cases} \varrho_1^2 = (x-r_1)^2 + y^2, \\ \varrho_2^2 = (x+r_2)^2 + y^2 \end{cases}$$

ist, so hat man

$$(3^*)\qquad U = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{\mu}{\varrho_2}.$$

Diese Gleichungen können in einer etwas bequemeren Form geschrieben werden. Man hat nämlich unter Berücksichtigung von (1)

$$\varrho_1^2 = \left(x - \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2 + y^2,$$

$$\varrho_2^2 = \left(x + \frac{1}{1+\mu}\right)^2 + y^2,$$

und also ist

$$\varrho_1^2 + \mu \varrho_2^2 = \frac{\mu}{1+\mu} + (1+\mu)(x^2+y^2) =$$

$$= \frac{\mu}{1+\mu} + n^2(x^2+y^2).$$

Setzen wir

$$(5) \qquad 2\,\Omega = \varrho_1^2 + \frac{2}{\varrho_1} + \mu\left(\varrho_2^2 + \frac{2}{\varrho_2}\right),$$

so können die Differentialgleichungen also in folgender, von Darwin zuerst gegebenen Form geschrieben werden.

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2n\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2n\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen besitzen das sogen. Jacobi'sche Integral

$$(7) \qquad V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\,\Omega - C,$$

wo C die Jacobi'sche Constante genannt wird.

Nach I § 8 (10) erhält man die Differentialgleichungen in canonischer Form, wenn man setzt:

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y,$$

$$p_1 = \frac{dx}{dt} - ny, \quad p_2 = \frac{dy}{dt} + nx,$$

$$(8^*) \qquad 2H = p_1^2 + p_2^2 + 2n(p_1 q_2 - p_2 q_1) - 2U,$$

in welchem Falle

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \\[2ex] \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}. \end{cases}$$

Wir haben im vorigen Abschnitte diese canonischen Diffe-

rentialgleichungen der numerischen Berechnung einer Bahn mittelst mechanischer Quadratur zu Grunde gelegt.

Wir werden uns hier der Form (6) für die Differentialgleichungen bedienen.

Wenn $x = a$, $y = b$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes sind, der nicht mit m_1 oder m_2 zusammenfällt, so ist aus der Form für Ω unmittelbar ersichtlich, dass die Function Ω — und ebenfalls alle ihre Ableitungen nach x und y — nach positiven Potenzen von $x - a$ und $y - b$ entwickelt werden kann. Wenn $x - a$ und $y - b$ hinreichend klein sind, so werden die Glieder der niedrigsten Ordnung in diesen Entwickelungen grösser sein als die Summe der übrigen Glieder in diesen Reihen.

Wir werden nun diejenigen Punkte aufsuchen, die so beschaffen sind, dass, wenn man sich ihnen hinreichend nähert, periodische Lösungen der Differentialgleichungen (6) existiren, so dass die unendlich kleine Masse P für immer in der Nähe dieser Punkte bleiben kann, indem sie sich in Bahnen bewegt, die in sich selbst zurückkehren.

Es sei (a, b) ein solcher Punkt, und man setze

$$x = a + \xi,$$

$$y = b + \eta.$$

Wir haben dann

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial a} + \xi\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} + \eta\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b} + \cdots \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial b} + \xi\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b} + \eta\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} + \cdots \end{cases}$$

Die zweiten und höheren Potenzen von ξ und η in diesen Entwickelungen können vernachlässigt werden, wenn wir uns darauf beschränken, solche periodische Bahnen aufzusuchen, die in der unmittelbaren Umgebung des Punktes (a, b) liegen.

Die Curven in endlicher Entfernung von (a, b) gehören der zweiten Classe periodischer Bahnformen an.

Wenn wir also in (9) nur die ersten Potenzen von ξ und η

beibehalten, so ist klar, dass, damit ξ und η klein bleiben, die folgenden Relationen stattfinden müssen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial b}. \tag{10}$$

Durch diese Gleichungen ist die Lage des Punktes (a, b) bestimmt.

Die Lösung dieser Gleichungen kann sehr einfach in folgender Weise erhalten werden. Es ist

$$\varrho_1^2 = (a - r_1)^2 + b^2,$$

$$\varrho_2^2 = (a + r_2)^2 + b^2,$$

und also

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial a} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} \frac{a - r_1}{\varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} \frac{a + r_2}{\varrho_2},$$

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial b} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} \frac{b}{\varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} \frac{b}{\varrho_2}.$$

Diese Gleichungen fordern, dass entweder

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0 \tag{11}$$

ist, oder dass man hat

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{a - r_1}{\varrho_1}, & \frac{a + r_2}{\varrho_2} \\ \frac{b}{\varrho_1}, & \frac{b}{\varrho_2} \end{vmatrix} = -\frac{b}{\varrho_1 \varrho_2}(r_1 + r_2) = -\frac{b}{\varrho_1 \varrho_2}. \tag{12}$$

Die Gleichungen (11) können in folgender Form geschrieben werden:

$$\varrho_1 - \frac{1}{\varrho_1^2} = 0 = \varrho_2 - \frac{1}{\varrho_2^2},$$

oder

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 1. \tag{13}$$

Dieser Punkt (a, b) liegt in der Ecke eines gleichseitigen Dreiecks, dessen eine Seite gleich $m_1\, m_2$ ist.

Es gibt offenbar zwei solche Punkte, die ich mit (a_4, b_4) und (a_5, b_5) bezeichnen will, so dass

$$a_4 = \quad a_5 = \frac{r_1 - r_2}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu},$$

$$b_4 = - b_5 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Der Punkt (a_4, b_4) liegt also in der Richtung der positiven Y-Achse, (a_5, b_5) in der Richtung der negativen.

Für die Punkte, welche der Lösung (12) entsprechen, muss $b = 0$ sein; sie liegen also auf der X-Achse. Der Werth von a für diese Punkte ist durch die Gleichung

$$(14) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} \frac{a - r_1}{\varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} \frac{a + r_2}{\varrho_2} = 0$$

bestimmt.

Bei der Berechnung der Wurzeln dieser Gleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} &1) \quad -r_2 < a < r_1, \\ &2) \quad a < -r_2, \\ &3) \quad r_1 < a. \end{aligned}$$

Diesen drei Fällen entsprechend hat man:

$$\begin{aligned} &1) \quad a - r_1 = -\varrho_1, \quad a + r_2 = +\varrho_2, \\ &2) \quad a - r_1 = -\varrho_1, \quad a + r_2 = -\varrho_2, \\ &3) \quad a - r_1 = +\varrho_1, \quad a + r_2 = +\varrho_2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (14) nimmt die folgenden Formen an:

$$\begin{aligned} &1) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0, \quad \varrho_1 = 1 - \varrho_2, \\ &2) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0, \quad \varrho_1 = \varrho_2 + 1, \\ &3) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0, \quad \varrho_1 = \varrho_2 - 1. \end{aligned}$$

In allen Fällen bekommt man eine Gleichung fünften Grades zur Bestimmung von ϱ_1 oder ϱ_2. Diese Gleichungen lauten:

$$(15)\begin{cases} 1)\quad (1+\mu)\varrho_2{}^5-(3+2\mu)\varrho_2{}^4+(3+\mu)\varrho_2{}^3-\mu\varrho_2{}^2+2\mu\varrho_2-\mu=0, \\ 2)\quad (1+\mu)\varrho_2{}^5+(3+2\mu)\varrho_2{}^4+(3+\mu)\varrho_2{}^3-\mu\varrho_2{}^2-2\mu\varrho_2-\mu=0, \\ 3)\quad (1+\mu)\varrho_1{}^5+(2+3\mu)\varrho_1{}^4+(1+3\mu)\varrho_1{}^3-\varrho_1{}^2-2\varrho_1-1=0. \end{cases}$$

Eine jede dieser Gleichungen hat eine reelle positive Wurzel die übrigen vier Wurzeln sind imaginär.

Für sehr kleine Werthe von μ haben diese Wurzeln die folgenden Grenzwerthe:

$$1)\qquad \varrho_2=\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}.$$

$$2)\qquad \varrho_2=\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}},$$

$$3)\qquad \varrho_1=1-\frac{7}{12}\mu.$$

Genauere Werthe geben die Gleichungen:

$$1)\qquad \varrho_2=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3},$$

$$2)\qquad \varrho_2=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3},$$

$$3)\qquad \varrho_1=1-\frac{7}{12}\mu+\frac{7}{12}\mu^2.$$

Wenn man die obigen Gleichungen fünften Grades mit der Gleichung (18*) in § 1 vergleicht, so ergiebt sich leicht, dass die Punkte, in deren Nähe periodische Bahnen vorkommen können, mit denjenigen Punkten zusammenfallen, in denen sich P befinden würde, wenn nach Lagrange eine strenge Lösung des Problems der drei Körper existirt.

Ausserdem können periodische Bahnen in der unmittelbaren

Nähe der Massen m_1 und m_2 vorkommen. Wir werden diese Bahnen in einem der folgenden Paragraphen näher untersuchen.

Ich stelle hier die genäherten Werthe der Coordinaten der fünf Librationscentra zusammen und bemerke, dass man bei grösseren Werthen von μ zu den Gleichungen (15) zurückkehren muss.

$$L_1 : a_1 = -\frac{1}{1+\mu} + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}, \quad b_1 = 0,$$

$$L_2 : a_2 = -\frac{1}{1+\mu} - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}, \quad b_2 = 0,$$

$$L_3 : a_3 = \frac{\mu}{1+\mu} + 1 - \frac{7}{12}\mu + \frac{7}{12}\mu^2, \quad b_3 = 0,$$

$$L_4 : a_4 = -\frac{1}{2}\frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad b_4 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$L_5 : a_5 = -\frac{1}{2}\frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad b_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 3. Die HILL'sche Grenzcurve.

Bevor wir zur näheren Betrachtung der periodischen Bahnen in der Nähe der Librationscentra übergehen, ist es angemessen, eine aus dem JACOBI'schen Integral § 2 (7) herfliessende Eigenschaft der Bahncurven näher zu studiren.

Das JACOBI'sche Integral lautete:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C. \tag{1}$$

Es wurde von HILL in seiner classischen Arbeit hervorgehoben, dass die Curve

$$2\Omega - C = 0 \tag{2}$$

eine wichtige Rolle für die Bewegung spielt.

Es folgt nämlich aus (1), dass die Coordinaten des Körpers in

jedem Zeitmoment nothwendigerweise solche Werthe haben müssen, dass

$$2\Omega - C > 0$$

ist.

Die reelle Ebene wird somit durch die Curve (2) in zwei Gebiete getrennt, und eine Bewegung des Körpers P ist nur in einem dieser Gebiete möglich. Wenn die Curve aus einem Zweige oder aus mehreren *geschlossenen* Zweigen besteht, innerhalb welcher $2\Omega - C$ positiv ist, so muss P bei seiner Bewegung *immer* in diesen geschlossenen Gebieten der Ebene bleiben.

Wir wollen die Curve (2) mit dem Namen „Grenzcurve" oder „Hill'sche Grenzcurve" bezeichnen.

Im zehnten Abschnitt werde ich die Bedeutung dieser Grenzcurve für gewisse Stabilitätsfragen näher betrachten. In diesem Abschnitt werden wir die Form der Grenzcurve für das asteroidische Drei-Körperproblem studiren.

Für jedes μ ist die Curve nur vom Werthe des Parameters C abhängig. Dieser Parameter kann aber nicht beliebige Werthe haben, wenn die Curve reell sein soll. Ist C negativ, so kann offenbar $2\Omega - C$ nie gleich Null sein. Die Constante C hat also einen gewissen *positiven Minimalwerth.* Ist C kleiner als dieser Werth, existirt also keine Grenzcurve, und der Körper m kann, so weit es auf das Jacobi'sche Integral ankommt, eine beliebige Lage in der Ebene einnehmen.

Wir wollen diesen Minimalwerth aufsuchen. Für ihn müssen die Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0$$

erfüllt sein, und aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, dass dies in den Librationscentren L_4 und L_5 stattfindet. Der entsprechende Werth von C wird aus (2) erhalten, indem man

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 1$$

setzt, und also ist

$$C_{\text{Minimum}} = 3(1 + \mu). \tag{3}$$

Wenn C diesen Minimalwerth hat, so reducirt sich die Grenzcurve auf die beiden Punkte L_4 und L_5.

Die Discussion der Form der Grenzcurve für verschiedene Werthe von C lässt sich in folgender Weise leicht ausführen.

Für sehr grosse Werthe von C lässt sich die Gleichung $2\Omega - C$, oder

$$\varrho_1^2 + \frac{2}{\varrho_1} + \mu\left(\varrho_2^2 + \frac{2}{\varrho_2}\right) = C \tag{4}$$

offenbar auf drei verschiedene Weisen erfüllen. Erstens wenn ϱ_1 sehr kleine Werthe annimmt, zweitens wenn ϱ_2 sehr klein wird, und drittens wenn die Summe

$$\varrho_1^2 + \mu\varrho_2^2$$

sehr gross wird. Für sehr grosse Werthe von C besteht also die Grenzcurve aus drei verschiedenen Zweigen, einem — α — sehr kleinen, der die Masse m_1 umschliesst, einem — β — auch sehr kleinen um die Masse m_2 und einem — γ — sehr grossen, der die beiden Massen umschliesst.

Die Gleichungen dieser Zweige in bipolaren Coordinaten sind genähert

$$\text{Für } \alpha: \quad \frac{2}{\varrho_1} = C,$$

$$\text{„} \quad \beta: \quad \mu\frac{2}{\varrho_2} = C,$$

$$\text{„} \quad \gamma: \varrho_1^2 + \mu\varrho_2^2 = C.$$

Die Zweige α und β sind also genähert Kreise. Der Radius des Kreises α ist grösser als der Radius von β. Ist $\mu = 1$, so sind die beiden Kreise gleich gross. Die dritte Curve ist eine Art Oval.

Wenn C an Grösse abnimmt, so wachsen die Radien der beiden Kreise, und das Oval zieht sich zu gleicher Zeit zusammen. Für einen bestimmten Werth von C, den wir C_1 nennen wollen,

fliessen die beiden Kreise zusammen, und die Grenzcurve nimmt eine Lemniscaten-ähnliche Form an. (Vgl. Fig. 5.)

Die Curve hat hier einen Doppelpunkt, dessen y-Coordinate gleich Null ist und dessen x-Coordinate die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

befriedigt. Diese Gleichung hat folgende Form:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} \frac{x - r_1}{\varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} \frac{x + r_2}{\varrho_2} = 0. \tag{6}$$

Da hier

$$x - r_1 = - \varrho_1, \quad x + r_2 = + \varrho_2$$

ist, so dass die Gleichung lautet:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0, \tag{6*}$$

so fällt der Doppelpunkt mit dem Librationspunkt L_1 zusammen.

Wird C kleiner als C_1, geht die Lemniscate in eine Stundenglas-ähnliche Curve über, welche bei einem Werth C_2 für C mit dem äusseren Ovale zusammenfliesst. Dieser Punkt liegt auf der X-Achse jenseits der kleineren Masse, so dass

$$\varrho_1 = \varrho_2 + 1.$$

Die Gleichung (6), die auch hier gilt, da es sich um einen Doppelpunkt handelt, giebt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0$$

und beim Vergleich mit dem vorigen Paragraphen findet man, dass dieser Doppelpunkt mit dem Librationspunkt L_2 zusammenfällt.

Die Grenzcurve nimmt nun eine Hufeisen-ähnliche Figur an. Im Inneren der Curve ist $2\Omega - C$ negativ, und hier kann also keine Bewegung stattfinden. Indem C von dem Werth C_2 an abnimmt,

schnürt sich die Hufeisen-ähnliche Figur allmählich zusammen und fällt bei dem Werth $C = C_3$ in zwei Curven auseinander. Der Trennungspunkt liegt auf der X-Achse jenseits der grösseren Masse und man findet leicht, dass dieser Doppelpunkt mit dem Librationscentrum L_3 zusammenfällt.

Für C-Werthe, die kleiner als C_3 sind, besteht die Grenzcurve aus zwei getrennten geschlossenen Zweigen, die für den Minimalwerth C_4 in die beiden Librationscentra L_4 und L_5 übergehen.

Für noch kleinere C-Werthe existirt, wie schon hervorgehoben worden ist, keine Grenzcurve mehr.

Die obigen Transformationen der Grenzcurve werden durch die folgende Figur 5 veranschaulicht, die dem Werth $\mu = 0.1$ entspricht. Sie ist von Darwin berechnet in seiner bekannten Arbeit „On periodic Orbits" (Acta Mathematica Bd. 21, 1897), wo man auch die vollständigste Discussion der Hill'schen Grenzcurve findet.

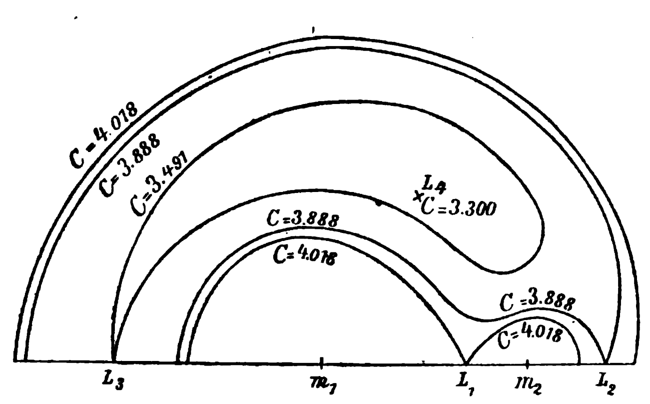


Fig. 5. Grenzcurve für $\mu = 0.1$.

Die Lage der Librationscentra (bez. der Doppelpunkte) ist aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich:

$\mu = 0.1$.

L_1:	$\varrho_1 = 0.7175$,	$\varrho_2 = 0.2825$,	$C_1 = 4.0182$,
L_2:	$\varrho_1 = 1.3470$,	$\varrho_2 = 0.3470$,	$C_2 = 3.8876$,
L_3:	$\varrho_1 = 0.9469$,	$\varrho_2 = 1.9469$,	$C_3 = 3.4905$,
L_4 und L_5:	$\varrho_1 = 1.0000$,	$\varrho_2 = 1.0000$,	$C_4 = 3.3000$.

Um eine Vorstellung von der Veränderung der Lage der Librationscentra bei verschiedenen Werthen von μ zu erhalten, gebe ich noch die entsprechenden Zahlen für $\mu = 1:320000$ und für $\mu = 1$ an. Die Lage der Librationscentra für $\mu = 1$ ist von BURRAU berechnet worden (Astr. Nachr. 3230 und 3251).

$\mu = 1:320000.$

L_1:	$\varrho_1 = 0.98990$,	$\varrho_2 = 0.01010$,	$C_1 = 3.0009264$,
L_2:	$\varrho_1 = 1.01017$,	$\varrho_2 = 0.01017$,	$C_2 = 3.0009227$,
L_3:	$\varrho_1 = 0.99999818$,	$\varrho_2 = 1.99999818$,	$C_3 = 3.0000156$,
L_4 und L_5:	$\varrho_1 = 1.0000$,	$\varrho_2 = 1.0000$,	$C_4 = 3.0000094$.

Endlich erhält man für $\mu = 1$:

$\mu = 1.$

L_1:	$\varrho_1 = 0.5000$,	$\varrho_2 = 0.5000$,	$C_1 = 8.500$,
L_2:	$\varrho_1 = 1.6984$,	$\varrho_2 = 0.6984$,	$C_2 = 7.412$,
L_3:	$\varrho_1 = 0.6984$,	$\varrho_2 = 1.6984$,	$C_3 = 7.412$,
L_4 und L_5:	$\varrho_1 = 1.0000$,	$\varrho_2 = 1.0000$,	$C_4 = 6.0000$.

Das Aussehen der Grenzcurve bei verschiedenen Werthen von C ist für $\mu = 1$ aus der beigefügten Figur 6 ersichtlich. Es mag indessen hervorgehoben werden, dass bei der Herstellung dieser Figur nur die Lage der Librationscentra und die Schnittpunkte der Curve mit der X-Achse und mit der Y-Achse in Betracht gezogen sind. Die letzteren sind durch die Formel

$$\varrho^2 + \frac{2}{\varrho} = \frac{C}{1+\mu} = \frac{C}{2} \tag{7}$$

gegeben, wo ϱ den Abstand des Schnittpunktes von irgend einer der Massen bezeichnet.

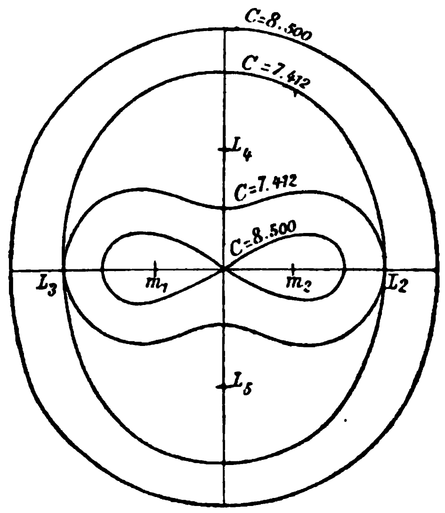


Fig. 6. Grenzcurve für $\mu = 1$.

Zur Bestimmung der Schnittpunkte mit der X-Achse dient die Gleichung

$$(7^*) \qquad 2\varrho^4 + 4\varrho^3 + (3 - C)\varrho^2 + (5 - C)\varrho + 2 = 0 .$$

Man hat nur die positiven Wurzeln der Gleichungen (7) und (7*) in Betracht zu ziehen.

§ 4. Periodische Lösungen in der Nähe der Librationscentra. Fortsetzung.

In Folge der Relationen § 2 (10) nehmen die Differentialgleichungen in der Nähe der Librationscentra folgende Form an:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\xi + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\eta , \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\xi + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\eta . \end{cases}$$

Es handelt sich also um lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

Wir können eine Lösung in folgender Form ansetzen:

$$\xi = A e^{\lambda t}, \quad y = B e^{\lambda t},$$

wo A und B durch die folgenden Relationen bestimmt werden:

$$(2) \quad \begin{cases} A\left(\lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}\right) - B\left(2n\lambda + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \, \partial b}\right) = 0, \\ A\left(2n\lambda - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \, \partial b}\right) + B\left(\lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Relationen erhalten wir die folgende Gleichung zur Bestimmung von λ:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}, & -\left(2n\lambda + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \, \partial b}\right) \\ 2n\lambda - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \, \partial b}, & \lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(3) \quad \lambda^4 - \lambda^2\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - 4(1+\mu)\right) + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \, \partial b}\right)^2 = 0.$$

Die Natur der Bewegung hängt von den Werthen der Wurzeln dieser Gleichung ab. Wenn λ^2 einen reellen und negativen Werth hat, so existieren periodische Lösungen. Wenn solche Wurzeln nicht vorkommen, so kann P nur während einer endlichen Zeit in der Nähe des Punktes (a, b) bleiben.

Für die Berechnung der Wurzeln müssen wir die Werthe der zweiten Ableitungen von Ω in den fünf verschiedenen Librationscentren kennen.

Man hat

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho_1^2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1}\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho_2^2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2}\frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial a^2}.$$

Eine ähnliche Relation hat man für $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$.

Weiter ist

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \, \partial b} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho_1^2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial a} \frac{\partial \varrho_1}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial a \, \partial b} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho_2^2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial a} \frac{\partial \varrho_2}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial a \, \partial b}.$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man die folgenden Werthe dieser Ableitungen in den verschiedenen Punkten.

Tabelle I.

	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \, \partial b}$
L_1	$1 + \mu + \frac{2}{\varrho_1^3} + \frac{2\mu}{\varrho_2^3}$	$1 + \mu - \frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{\mu}{\varrho_2^3}$	0
L_2	„	„	0
L_3	„	„	0
L_4	$\frac{3}{4}(1 + \mu)$	$\frac{9}{4}(1 + \mu)$	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - \mu)$
L_5	„	„	$+\frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - \mu)$

Die Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 in den drei Punkten L_1, L_2 und L_3 sind den Gleichungen § 2 (15) zu entnehmen.

Setzen wir

$$2f = \frac{1}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3},$$

so sind die Wurzeln, welche den Punkten L_1, L_2 und L_3 entsprechen, durch die Formel

$$\lambda^2 = -(1 + \mu - f) \pm \sqrt{9f^2 - 4(1 + \mu)f} \tag{4}$$

gegeben.

Diese Wurzeln sind reell, die eine ist positiv, die andere

negativ. Dies wird von PLUMMER (Monthly Notices of the Royal Astr. Soc. LXII. 1901) in folgender Weise bewiesen:[1]

Aus (3) ist ersichtlich, dass der Satz bewiesen ist, wenn man zeigt, dass

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a\,\partial b}\right)^2 < 0$$

ist. Nun ist aber, nach Tabelle I, in L_1, L_2 und L_3

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a\,\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} > 0,$$

und es genügt also zu zeigen, dass

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} < 0 \tag{5}$$

ist.

Man hat aber für $y = 0$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \frac{1}{\varrho_1}\,\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\,\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2}. \tag{6}$$

In L_1 ist

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} = \varrho_1 - \frac{1}{\varrho_1^2}$$

und also

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\varrho_1 - \frac{1}{\varrho_1^2}\right),$$

ein Ausdruck, der negativ ist, weil $\varrho_1 < 1$ ist.

In L_2 ist

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{\varrho_1^2} - \varrho_1.$$

und also

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\varrho_1 - \frac{1}{\varrho_1^2}\right)$$

---

[1] Die Herren C. A. SCHULTZ-STEINHEIL und BOURGET haben mir vorher brieflich ähnliche Beweise dieses Satzes gesandt.

und weil $\varrho_1 = \varrho_2 + 1$ ist, so ist der erste Factor in diesem Ausdrucke negativ, der zweite aber positiv, also $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$ negativ.

Endlich ist in L_3 auch

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\varrho_1 - \frac{1}{\varrho_1^{\,2}}\right),$$

und da hier $\varrho_2 = \varrho_1 + 1$ ist, so ist der erste Factor positiv, der zweite negativ, und auch in diesem Falle wird also $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$ negativ ausfallen.

Der negativen Wurzel λ^2 entspricht eine periodische Lösung der Differentialgleichungen, und es *existiren also für alle μ periodische Bahnen in der Umgebung von L_1, L_2 und L_3.*

Die numerische Auflösung der Gleichung (4) giebt folgende Werthe der Wurzeln für $\mu = 1$, $\mu = 0.1$ und $\mu = 1:320000$.

Tabelle II.

λ^2

μ	L_1		L_2		L_3	
1	+28.63	−16.63	+2.671	−3.531	+2.671	−3.531
0.1	+12.426	− 7.482	+4.695	−3.091	+0.253	−1.261
1:320000	+ 6.413	− 4.353	+6.176	−4.234	0.000	−1.000

Die Grenzwerthe der Wurzeln für verschwindenden Werth von μ wird durch die Formel

$$(4^*) \qquad \lambda^2 = 1 \pm \sqrt{28}$$

in L_1 und L_2, und durch

$$(4^{**}) \qquad \lambda^2 = -0.5 \pm 0.5$$

in L_3 ausgedrückt.

Die periodischen Lösungen in der Nähe von L_4 und L_5 lassen sich leicht discutiren. Mit den gegebenen Werthen der Ab-

leitungen erhält man dieselbe Gleichung für λ in beiden Punkten, nämlich

$$4\lambda^4 + 4(1+\mu)\lambda^2 + 27\mu = 0. \tag{7}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind reell, wenn

$$(1+\mu)^2 > 27\mu,$$

d. h. wenn

$$\mu < 0.0401. \tag{8}$$

Ist μ kleiner als dieser Grenzwerth, so sind die Werthe für λ^2 beide negativ und es giebt dann *zwei* verschiedene Gattungen von periodischen Lösungen. Wenn dagegen $\mu > 0.0401$, dann hat man in diesen Punkten keine periodischen Lösungen.

Burrau hat l. c. einige numerische Rechnungen gemacht, um periodische Bahnen für $\mu = 1$ in der Nähe von L_4 zu suchen und keine gefunden, was zu erwarten war, da solche nicht, wenigstens in der unmittelbaren Nähe dieses Punktes, für diesen Werth von μ vorkommen.

In L_4 und L_5 sind also periodische Lösungen nur für sehr kleine Werthe von μ vorhanden. Es ist deswegen angemessen, die Wurzeln von (7) nach Potenzen von μ zu entwickeln. Wir erhalten dann für die eine Wurzel von (7) den Ausdruck

$$\lambda^2 = -6.75\mu - 38.8125\mu^2$$

und für die andere

$$\lambda^2 = -1 + 5.75\mu + 38.8125\mu^2.$$

Zu jeder Wurzel λ gehört ein entsprechender Werth von $A:B$. Das allgemeine Integral von (1) lautet

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^{4} A_i e^{\lambda_i t}, \\ \eta &= \sum_{i=1}^{4} B_i e^{\lambda_i t}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

wo A_i und B_i durch die Relation

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{2\sqrt{1+\mu}\,\lambda_i + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a\, \partial b}}{\lambda_i^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}} \tag{10}$$

mit einander verbunden sind.

Vier von den Coefficienten A_i und B_i können willkürlich gewählt werden. Ich will B_1, B_2, B_3 und B_4 als diese willkürlichen Constanten bezeichnen. Die entsprechenden Werthe von A_i werden dann aus (10) erhalten.

Es seien λ_1 und λ_2 zwei conjugirte rein imaginäre Wurzeln, so dass, wenn

$$\nu^2 = -\lambda^2$$

gesetzt wird, die entsprechenden ν_1 und ν_2 reell sind. Zur Abkürzung setzen wir noch

$$r = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2},$$

$$t = \frac{\partial \Omega}{\partial a\, \partial b}.$$

Es ist also

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{t}{\nu^2 + r} - \frac{2\sqrt{1+\mu}\,\nu_1}{\nu^2 + r}\sqrt{-1},$$

$$\frac{A_2}{B_2} = -\frac{t}{\nu^2 + r} - \frac{2\sqrt{1+\mu}\,\nu_2}{\nu^2 + r}\sqrt{-1}.$$

Wir trennen in A_1 und A_2 die reellen und imaginären Theile, indem wir setzen

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{-1},$$

$$A_2 = a_1 - \alpha_2\sqrt{-1},$$

und können dann schreiben

$$B_1 = \beta_1 + \beta_2\sqrt{-1},$$

$$B_2 = \beta_1 - \beta_2\sqrt{-1}.$$

Es ist also

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = 2\alpha_1 \cos \nu_2 t + 2\alpha_2 \sin \nu_2 t.$$

Wenn die willkürlichen Constanten B_3 und B_4 gleich Null gewählt werden, so existirt also eine periodische Lösung von der Form

$$(11)\quad \begin{cases} \xi = 2\alpha_1 \cos \nu_2 t + 2\alpha_2 \sin \nu_2 t, \\ \eta = 2\beta_1 \cos \nu_2 t + 2\beta_2 \sin \nu_2 t, \end{cases}$$

und zwischen den Coefficienten bestehen hier die Relationen

$$(11^*)\quad \begin{cases} (\nu_2^2 + r)\alpha_1 = - \quad t\beta_1 - 2n\nu_2\beta_2, \\ (\nu_2^2 + r)\alpha_2 = 2n\nu_2\beta_1 - \quad t\beta_2, \end{cases}$$

und die Gleichung (3) lautet

$$(11^{**})\quad (\nu^2 + r)(\nu^2 + s) = 4n^2\nu^2 + t^2.$$

Aus (11^*) und (11^{**}) erhalten wir

$$\begin{aligned} (\nu_2^2 + r)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) &= - \quad t(\beta_1^2 + \beta_2^2), \\ (\nu_2^2 + r)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) &= - \quad 2n\nu_2(\beta_1^2 + \beta_2^2), \\ (\nu_2^2 + r)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) &= (\nu_2^2 + s)(\beta_1^2 + \beta_2^2). \end{aligned}$$

Die Gleichung der von P beschriebenen Bahn wird erhalten, indem man die Zeit aus den Gleichungen (11) eliminirt.

Man erhält in dieser Weise:

$$4\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2 \\ \beta_1, & \beta_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \xi, & \alpha_2 \\ \eta, & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1, & \xi \\ \beta_1, & \eta \end{vmatrix}^2,$$

oder

$$4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = (\beta_1^2 + \beta_2^2)\xi^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\eta^2 - 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\xi\eta,$$

oder, indem wir die Werthe von α und β einführen,

(12) $$R^2 = (\nu^2 + r)\xi^2 + (\nu^2 + s)\eta^2 + 2t\xi\eta,$$

wo

(12*) $$R^2 = \frac{16n^2\nu^2}{\nu^2 + r}(\beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Ziehen wir die Werthe von r, s und t aus Tabelle I in Betracht, finden wir, dass die Curve (12) für alle Librationscentra eine Ellipse repräsentirt.

In L_1, L_2 und L_3 ist

$$t = 0,$$

und eine Achse der Ellipse liegt also in der Achse der ξ-Coordinaten. Wir werden später zu diesen Curven zurückkehren.

In L_4 und L_5 müssen die Achsen des Coordinatensystems gedreht werden, so dass sie mit den Achsen der Ellipse zusammenfallen. Setzen wir

$$\xi = x\cos\theta - y\sin\theta,$$

$$\eta = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

so erhalten wir für den Winkel θ den Werth

(13) $$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2t}{r - s},$$

oder nach Tabelle I

(13*) $$\operatorname{tg} 2\theta = \pm\sqrt{3}\,\frac{1 - \mu}{1 + \mu},$$

wo das Zeichen + dem Punkte L_4, das Zeichen − dem Punkte L_5 gehört.

Da die Masse μ immer kleiner als 0.04 ist, wenn eine periodische Lösung existirt, so ist aus (13*) ersichtlich, dass der Winkel θ wenig von $\pm 30^0$ abweicht.

Die eine Achse der Ellipse ist also nahe gegen die grössere Masse (m_1) *gerichtet,* die andere Achse steht senkrecht zu dieser Linie.

Für die halben Achsen a und b der Ellipse erhalten wir die Werthe:

$$\frac{R^2}{a^2} = (\nu^2 + r)\cos^2\theta + (\nu^2 + s)\sin^2\theta + t\sin 2\theta,$$

$$\frac{R^2}{b^2} = (\nu^2 + r)\sin^2\theta + (\nu^2 + s)\cos^2\theta - t\sin 2\theta,$$

Ausdrücke, die auch in der Form

$$\frac{R^2}{a^2}\cos 2\theta = (\nu^2 + r)\cos^2\theta - (\nu^2 + s)\sin^2\theta,$$

$$\frac{R^2}{b^2}\cos 2\theta = (\nu^2 + s)\cos^2\theta - (\nu^2 + r)\sin^2\theta$$

geschrieben werden können.

Die genauen Werthe der Halbachsen können leicht erhalten werden. In Anbetracht des kleinen Werthes von μ, wenn periodische Lösungen vorkommen, ist es indessen zu empfehlen, sich einer Entwickelung nach Potenzen von μ zu bedienen. Es ist genähert

$$\cos 2\theta = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\mu,$$

$$\cos^2\theta = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{8}\mu,$$

$$\sin^2\theta = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{8}\mu.$$

Weiter ist (genau)

$$r = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}\mu,$$

$$s = \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{4}\mu.$$

In Bezug auf ν^2 müssen wir zwei Fälle unterscheiden, den zwei Wurzeln von (11**) entsprechend:

$$1) \qquad \nu^2 = 6.75\,\mu.$$

Hier ist

$$R^2 = 144\,\mu(\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

$$a^2 = 16\;(\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

$$b^2 = 48\,\mu(\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

so dass

$$b = \sqrt{3\mu}\,a. \tag{14}$$

Die Excentricität der Ellipse ist immer nahe gleich der Einheit. Der grösste Werth von $b:a$, der vorkommen kann, ist:

$$\text{Max.}\ \frac{b}{a} = \sqrt{0.12} = 0.35\,.$$

Ist m_2 die Erde, für welche wir

$$\mu = 1:320000$$

setzen, so ist

$$\frac{b}{a} = 0.00306\,.$$

Ist μ die Masse Jupiters (wir nehmen an, dass m_1 die Sonne bezeichnet), dann ist die grössere Achse in der Ellipse 19 mal grösser als die kleinere Achse.

Für die zweite Wurzel von (11**)

$$2)\qquad v^2 = 1 - 5.75\,\mu$$

hat man

$$R^2 = \frac{64}{7} - \frac{848}{49}\,\mu\,,$$

und weiter

$$a^2 = \frac{64}{7}(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2)\,,$$

$$b^2 = \frac{16}{7}(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2)\,.$$

Beide Achsen bleiben endlich für verschwindende Werthe von μ. Die grosse Achse ist das Zweifache der kleinen Achse.

Durch jeden Punkt hinreichend nahe den Punkten L_4 oder L_5 ist es also möglich zwei Curven zu ziehen, welche zwei verschiedenen periodischen Lösungen des Problems entsprechen.

Wir müssen bemerken, dass die Werthe der Halbachsen der Ellipsen in den zwei Fällen 1) und 2) nicht direct mit einander vergleichbar sind, da $\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2$ nicht nur von den Anfangscoordinaten, sondern auch von dem Werthe der Wurzel v abhängt, der in den zwei Fällen verschieden ist.

Wir wollen a und b direct durch die Anfangscoordinaten ausdrücken.

Wenn diese mit ξ_0 und η_0 bezeichnet werden, so ist nach (11**)

$$\frac{16\, n^2 \nu^2}{\nu^2 + r}(\beta_1^2 + \beta_2^2) = R^2 = (\nu^2 + r)\,\xi_0^2 + (\nu^2 + s)\,\eta_0^2 + 2\,t\,\xi_0\,\eta_0.$$

Wir wollen, der Einfachheit wegen, annehmen, dass $\eta_0 = 0$, dann ist

$$16\, n^2 \nu^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) = (\nu^2 + r)^2 \xi_0^2, \tag{15}$$

und also im Falle 1)

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{1}{192\,\mu}\,\xi_0^2,$$

und im Falle 2)

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{49}{256}\,\xi_0^2,$$

so dass die halben Achsen der Ellipsen folgende Werthe annehmen.

$$1)\ \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{12\,\mu}\,\xi_0^2, \\[2ex] b^2 = \dfrac{1}{4}\,\xi_0^2. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} a^2 = \dfrac{7}{4}\,\xi_0^2, \\[2ex] b^2 = \dfrac{7}{16}\,\xi_0^2. \end{cases}$$

In allen diesen Formeln hat ξ_0 dieselbe Bedeutung, nämlich die ξ-Coordinate desjenigen Punktes, in welchem die Curve die ξ-Achse schneidet.

Wir bemerken, dass für alle Curven derselben Familie, die Excentricität einen und denselben Werth hat, nämlich für 1) $\sqrt{1-3\,\mu}$ und für 2) $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Die kleinen Achsen der beiden Curven sind beide endlich. Die grosse Achse in 2) hat auch einen endlichen Werth, dagegen wächst

die grosse Achse im Falle 1) ins Unendliche, wenn μ gegen Null abnimmt.

Es ist von Interesse, die periodischen Curven mit Hinsicht auf den Werth der Jacobi'schen Constante C zu classificiren. Es ist nämlich bemerkenswerth, dass jedem Werth von C höchstens eine periodische Curve in der Nähe jedes Librationscentrums entspricht.

Das Jacobi'sche Integral lautete:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 2\Omega - C.$$

Wir wollen hier C durch die Anfangscoordinaten ξ_0 und η_0 ausdrücken.

Aus (11) erhält man

$$(16^*) \quad \begin{cases} \xi' = -2\nu_2\alpha_1 \sin\nu_2 t + 2\nu_2\alpha_2\cos\nu_2 t, \\ \eta' = -2\nu_2\beta_1\sin\nu_2 t + 2\nu_2\beta_2\cos\nu_2 t. \end{cases}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen und in (11) $t = 0$, erhält man

$$(16) \quad \begin{cases} \xi_0 = 2\alpha_1, \\ \eta_0 = 2\beta_1, \\ \xi_0' = 2\nu_2\alpha_2, \\ \eta_0' = 2\nu_2\beta_2. \end{cases}$$

Mittelst (11*) können wir ξ_0' und η_0' durch α_1 und β_1 ausdrücken und dann auch durch ξ_0 und η_0. Man hat

$$2n\nu_2\alpha_2 = \qquad t\alpha_1 + (\nu^2 + s)\beta_1,$$
$$2n\nu_2\beta_2 = -(\nu^2 + r)\alpha_1 - \qquad t\beta_1,$$

so dass

$$2n\xi_0' = \qquad t\xi_0 + (\nu^2 + s)\eta_0,$$
$$2n\eta_0' = -(\nu^2 + r)\xi_0 - \qquad t\eta_0,$$

und also

$$\begin{aligned} 4n^2(\xi_0'^2 + \eta_0'^2) = & \; [t^2 + (\nu^2 + r)^2]\,\xi_0^2 + \\ & + [t^2 + (\nu^2 + s)^2]\,\eta_0^2 + \\ & + [\nu^2 + r + \nu^2 + s]\,2t\,\xi_0\eta_0. \end{aligned}$$

Wenn Ω nach Potenzen von ξ und η entwickelt wird, so erhält man, indem die Relationen § 2 (10) in Betracht gezogen werden,

$$2\,\Omega = 2\,\Omega_0 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}\xi^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a\,\partial b}\xi\eta + \ldots,$$

wo Ω_0 den Werth von Ω in dem betreffenden Librationscentrum bezeichnet.

Indem wir, wie vorher, den Punkt (ξ_0, η_0) so wählen, dass $\eta_0 = 0$ ist, so erhalten wir

$$C = 2\,\Omega_0 + \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} - \frac{1}{4 n^2}\left(t^2 + (\nu^2 + r)^2\right)\right]\xi_0^2. \tag{17}$$

Mit den schon gegebenen Werthen der Ableitungen und der Wurzeln in L_4 und L_5 erhalten wir also:

im Falle 1)

$$C = 2\,\Omega_0 + \frac{3}{16}\xi_0^2,$$

im Falle 2)

$$C = 2\,\Omega_0 - \frac{7}{16}\xi_0^2.$$

Wir lernen aus diesen Ausdrücken, dass solche C-Werthe, die etwas *grösser* als $2\,\Omega_0$ sind, der Curvenschar 1) angehören, wogegen in 2) die C-Werthe etwas *kleiner* als $2\,\Omega_0$ sind.

Die Curven, welche der Wurzel 1) entsprechen, wollen wir *die Familie d von Curven* nennen, und die Curven, welche der zweiten Wurzel von (11**) gehören, als *die Familie e von Curven* bezeichnen.

Zu jedem Werth von ξ_0 gehören zwei Werthe von C, wogegen nur ein Werth von ξ_0 jedem Werth von C — der nicht viel von $2\,\Omega_0$ abweicht — entspricht.

Wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde, ist in L_4 und L_5

$$2\,\Omega_0 = 3(1 + \mu). \tag{17*}$$

Dies ist der kleinste Werth von C, für welchen reelle Zweige der Hill'schen Grenzcurve

$$2\,\Omega - C = 0$$

existiren.

Hat C einen Werth, der etwas grösser als dieser Minimalwerth (17*) ist, besteht die Grenzcurve aus zwei Ellipse-ähnlichen Zweigen, welche die Punkte L_4 und L_5 umgeben. Die Gleichungen dieser Ellipsen sind

$$C - 3(1+\mu) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}\xi^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a\, \partial b}\xi\eta.$$

Wird diese Ellipse mit der Ellipse (12) verglichen, so finden wir, dass die Achsen der beiden Ellipsen parallel sind. Die periodischen Curven von der Familie d umschliessen also die ähnlichen Ellipsen, welche die Grenzcurve für C-Werthe etwas grösser als $3(1+\mu)$ bilden.

Für $C < 3(1+\mu)$ ist keine Grenzcurve vorhanden. Es giebt aber auch dann periodische Lösungen, nämlich die Curven von der Familie e. Es ist von Burrau zuerst bemerkt worden, dass die Existenz einer Grenzcurve keine nothwendige Bedingung für das Vorkommen von periodischen Lösungen ist.

Die Umlaufszeit von P in ihrer Bahn kann leicht gefunden werden.

Wird die Umlaufszeit in einer Bahn von der Familie d mit τ_4 und in einer Bahn von der Familie e mit τ_5 bezeichnet, so ist allgemein

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu}.$$

Die Umlaufszeit von m_1 und m_2 um den gemeinsamen Schwerpunkt war durch die Gleichung

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}}$$

gegeben, so dass

$$\tau = \frac{\sqrt{1+\mu}}{\nu}T. \tag{18}$$

Setzen wir hier die Werthe von ν, welche den Fällen d und e entsprechen, ein, so finden wir die folgenden genäherten Werthe der Perioden:

$$\tau_4 = \frac{T}{\sqrt{6.75\,\mu}},$$

$$\tau_5 = T(1 + 3.375\,\mu).$$

Die Umlaufszeit ist dieselbe für alle Curven derselben Familie.

Für die Familie e ist die Umlaufszeit nahe gleich T, für die Familie d ist die Periode sehr lang.

Nehmen wir z. B.

$$\mu = 1:320000,$$

so dass m_2 die Erde, m_1 die Sonne bezeichnet, so hat man

$$\tau_4 = 217.8 \text{ Jahre},$$

$$\tau_5 = 1 \text{ Jahr} + 5.546 \text{ Minuten}.$$

Wir kehren nun zu den periodischen Bahnen in der Nähe von L_1, L_2 und L_3 zurück. Ihre Gleichung war

$$R^2 = (\nu^2 + r)\,\xi^2 + (\nu^2 + s)\,\eta^2,$$

wo R^2 den Werth (12*) hat. Die halben Achsen der Ellipsen haben die Werthe

$$a^2 = \frac{16\,n^2\nu^2}{(\nu^2 + r)^2}(\beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2}),$$

$$b^2 = \frac{16\,n^2\nu^2}{(\nu^2 + r)(\nu^2 + s)}(\beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2})$$

$$= 4(\beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2})$$

in Folge der Relation (11**).

Setzen wir den Ausdruck (15) für $\beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2}$ hier ein, so bekommt man

$$(19)\qquad \begin{cases} a^2 = \xi_0^{\,2}, \\ b^2 = \dfrac{(\nu^2 + r)^2}{4\,n^2\nu^2}\,\xi_0^{\,2} = \dfrac{\nu^2 + r}{\nu^2 + s}\,\xi_0^{\,2}. \end{cases}$$

Die Excentricität dieser Ellipsen ist also von ξ_0 unabhängig, und hat also für sämmtliche Curven, welche einen der Punkte L_1, L_2 oder L_3 umschliessen, denselben Werth.

Aus den Ausdrücken für r und s in Tabelle I folgt, dass

$$\nu^2 + r > \nu^2 + s,$$

und also ist b die halbe *grosse* Achse der Ellipsen.

Die halbe kleine Achse a ist gleich ξ_0, wie erwartet werden konnte.

Unter Anwendung der Werthe aus Tabelle I erhalten wir die folgenden numerischen Werthe der charakteristischen Constanten der Ellipsen um L_1, L_2 und L_3 für $\mu = 1$, $\mu = 0.1$ und $\mu = 1:320000$. Wir bezeichnen mit Darwin diese Curven bez. als die Familie a, b und c von periodischen Bahnen.

Tabelle III.

L_1

Familie a von periodischen Bahnen.

	$\mu = 1$	$\mu = 0.1$	$\mu = 1:320000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+34.000	+15.388	+ 9.120
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	−14.000	− 6.044	− 3.060
ν^2	+16.63	+ 7.482	+ 4.358
$\nu^2 + r$	+50.63	+22.87	+13.478
$\nu^2 + s$	+ 2.63	+ 1.438	+ 1.293
$b : a$	4.387	3.988	3.227
e	0.974	0.968	0.951
$\tau : T$	0.347	0.384	0.479
τ^0	124°.8	138°.0	172°.6

τ^0 ist der Winkel, den die Linie $m_1 m_2$ in derjenigen Zeit beschrieben hat, in welcher P einen Umlauf in seiner Bahn zurückgelegt hat.

Tabelle IV.

L_2

Familie b von periodischen Bahnen.

	$\mu = 1$	$\mu = 0.1$	$\mu = 1:320000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+ 8.280	+6.708	+ 8.884
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	− 1.140	−1.704	− 2.942
ν^2	+ 3.531	+3.091	+ 4.234
$\nu^2 + r$	+11.811	+9.799	+13.118
$\nu^2 + s$	+ 2.391	+1.387	+ 1.292
$b : a$	2.221	2.659	3.187
e	0.893	0.929	0.951
$\tau : T$	0.752	0.597	0.486
τ^0	270°.9	214°.8	175°.0

Tabelle V.

L_3

Familie c von periodischen Bahnen.

	$\mu = 1$	$\mu = 0.1$	$\mu = 1:320000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+ 8.280	+3.484	+3.000
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	− 1.140	−0.092	0.000
ν^2	+ 3.531	+1.261	+1.000
$\nu^2 + r$	+11.811	+4.745	+4.000
$\nu^2 + s$	+ 2.391	+1.169	+1.000
$b : a$	2.221	2.015	2.000
e	0.893	0.869	0.867
$\tau : T$	0.752	0.934	1.000
τ^0	270°.9	336°.2	360°.0

Wir haben noch die Richtung der Bewegung in den verschiedenen Bahnen zu bestimmen. Es ist für diesen Zweck genügend $\eta_0 = 0$ zu setzen, in welchem Fall die Richtung durch das Zeichen von η_0' bestimmt ist. Es ist aber

$$2n\eta_0' = -(\nu^2 + r)\xi_0.$$

Da das Zeichen von $\nu^2 + r$ für alle Curven positiv ist, so werden sämmtliche Curven in einer Richtung beschrieben, die derjenigen Richtung entgegengesetzt ist, in welcher die Bewegung von m_1 und m_2 um den gemeinsamen Schwerpunkt stattfindet.

Mittelst (17) kann man die JACOBI'sche Constante durch den Anfangswerth ξ_0 der Coordinate ξ ausdrücken. Man bekommt hieraus

Tabelle VI.

Werthe der JACOBI'schen Constante.

Familie	$\mu = 1$	$\mu = 0.1$	$\mu = 1:320000$
a	$8.500 - 286.0\ \xi_0^2$	$4.0182 - 103.5\ \xi_0^2$	$3.0009264 - 36.22\ \xi_0^2$
b	$7.412 - 9.16\ \xi_0^2$	$3.8876 - 15.12\ \xi_0^2$	$3.0009227 - 34.16\ \xi_0^2$
c	$7.412 - 9.16\ \xi_0^2$	$3.4905 - 1.63\ \xi_0^2$	$3.0000156 - 1.00\ \xi_0^2$
d	—	—	$3.0000094 + \frac{3}{16}\ \xi_0^2$
e	—	—	$3.0000094 - \frac{7}{16}\ \xi_0^2$

Durch jeden Punkt in der Umgebung von L_1, L_2 und L_3 kann man eine — und nur eine — periodische Curve der ersten Classe legen. Die JACOBI'sche Constante ist für die Curven von der Familie *a* immer kleiner als C_1, was ja nothwendig ist, weil die Grenzcurve für $C = C_1$ einen Doppelpunkt in L_1 besitzt. Aus ähnlichem Grunde muss, für die Familie *b*, C kleiner als C_2, für die Familie *c*, C kleiner als C_3 sein. Durch jeden Punkt in der Umgebung von L_4 und L_5 können dagegen immer zwei periodische

Bahnen gelegt werden, die eine — von der Familie d — von sehr langer Periode, die mit abnehmendem Werthe von μ ins Unendliche wächst, die andere mit einer Periode etwas länger als die Umlaufszeit von m_1 und m_2 um den gemeinsamen Schwerpunkt.

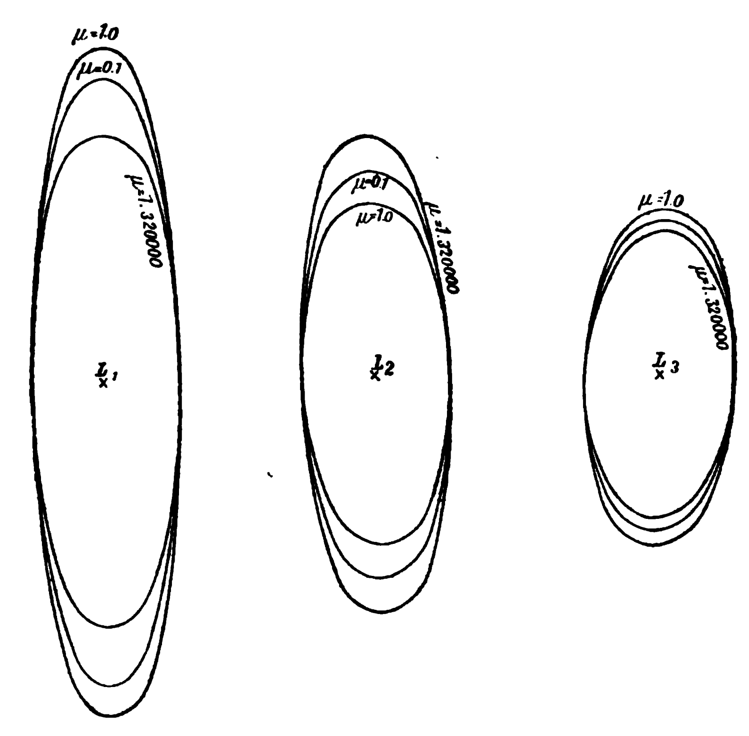


Fig. 7. Periodische Bahnen in der Nähe der Librationscentra L_1, L_2 und L_3.

Die in den Tabellen III, IV und V berechneten Curven sind in der obigen Figur wiedergegeben. Der Abstand der Schnittpunkte der Curven mit der ξ-Achse vom entsprechenden Librationscentrum ist für alle Curven gleich. Die Curven um L_3 sind etwas verzeichnet, insofern sie für $\mu = 0.1$ und $\mu = 1:320000$ im Maassstabe der Figur fast zusammenfallen müssen.

Die periodischen Bahnen um L_4 in Fig. 8 sind für $\mu = 0.01$ gezeichnet, da die grosse Achse der Ellipse der Familie c für

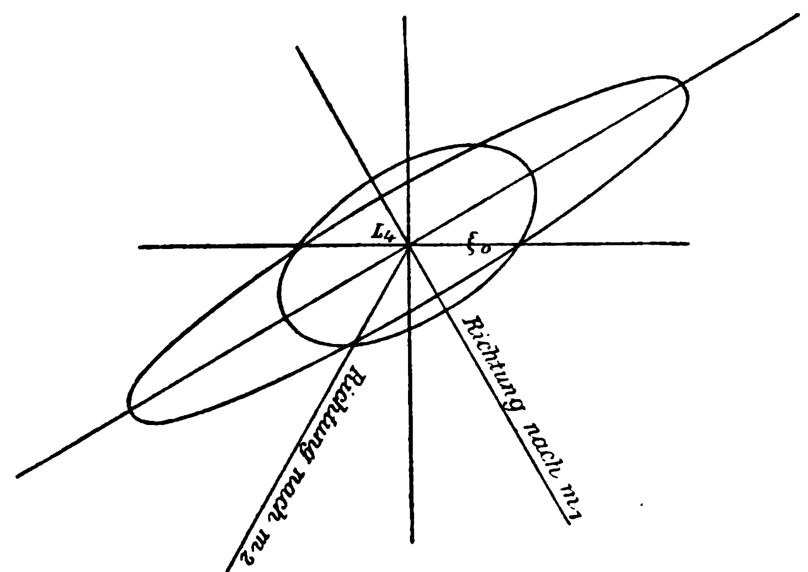


Fig. 8. Periodische Bahnen in der Nähe von L_4.

$\mu = 1:320000$ allzu gross sein würde. Die beiden Curven schneiden sich in einer durch L_4 parallel der ξ-Achse gezogenen Linie.

§ 5. Periodische Lösungen in der Umgebung der Massen.

Wenn der Asteroid P mit m_1 oder m_2 zusammenfällt, wird ϱ_1 oder ϱ_2 gleich Null und also Ω unendlich gross. Die Potentialfunction Ω lässt sich also in den Punkten m_1 und m_2 nicht nach steigenden Potenzen der Coordinaten entwickeln. Die Untersuchung der periodischen Bahnen in der Umgebung der Massenpunkte ist deswegen mit bedeutend grösseren Schwierigkeiten verbunden als die Untersuchung der Bahnen in der Umgebung der Librationscentra. Das hier vorliegende Problem kann auch nicht als völlig gelöst betrachtet werden, obgleich sehr tiefgehende und höchst interessante Untersuchungen von Hill wichtige Eigenschaften der Lösungen entdeckt haben.

Wird der Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt von m_1 und m_2 gelegt, so lauten die Bewegungsgleichungen für P:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{d t^2} - 2n \dfrac{d\eta}{dt} - n^2 x = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2 y}{d t^2} + 2n \dfrac{dx}{dt} - n^2 y = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \end{cases}
$$

wo wir noch die Einheiten für Masse und Abstand unbestimmt lassen, dagegen die Attractionsconstante gleich Eins setzen. Es ist also

$$
(1^*) \qquad \begin{cases} n^2 = \dfrac{m_1 + m_2}{a^3}, \\[2ex] U = \dfrac{m_1}{\varrho_1} + \dfrac{m_2}{\varrho_2}, \end{cases}
$$

wo a den Abstand zwischen m_1 und m_2 bezeichnet. Es ist hier

$$
\varrho_1{}^2 = \left(x - \frac{m_2}{m_1 + m_2} a\right)^2 + y^2,
$$

$$
\varrho_2{}^2 = \left(x + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a\right)^2 + y^2,
$$

und also:

$$
m_1 \varrho_1{}^2 + m_2 \varrho_2{}^2 = (m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2,
$$

oder unter Berücksichtigung von (1*)

$$
\frac{m_1}{a^3} \varrho_1{}^2 + \frac{m_2}{a^3} \varrho_2{}^2 = n^2 (x^2 + y^2) + n^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} a^2 .
$$

Setzen wir also

$$
(2^*) \qquad 2\,\Omega = m_1 \left(\frac{\varrho_1{}^2}{a^3} + \frac{2}{\varrho_1}\right) + m_2 \left(\frac{\varrho_2{}^2}{a^3} + \frac{2}{\varrho_2}\right),
$$

so können wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{d t^2} - 2n \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2 y}{d t^2} + 2n \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} \end{cases}
$$

schreiben. Diese Gleichungen gehen für $a = 1 = m_1$ in die Gleichungen § 2 (6) über. Indessen wollen wir erst später die Wahl der Einheiten treffen.

Um die Bewegung in der Umgebung einer der Massen, z. B. m_2, zu untersuchen, setzen wir

$$(3)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\, a + \xi, \\ y = \quad \eta \end{cases}$$

und erhalten

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 \xi}{d t^2} - 2 n \dfrac{d \eta}{d t} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\[2ex] \dfrac{d^2 \eta}{d t^2} + 2 n \dfrac{d \xi}{d t} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \end{cases}$$

wo Ω noch durch (2^*) gegeben ist.

Alle Glieder in Ω mit Ausnahme von

$$\frac{m_1}{\varrho_2} = \frac{m_2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

lassen sich nach Potenzen von ξ und η entwickeln. Es ist

$$\varrho_1{}^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2,$$

$$\varrho_2{}^2 = \xi^2 + \eta^2 = \varrho^2,$$

und

$$\frac{1}{\varrho_1} = (a^2 + \varrho^2 - 2 a \xi)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{1 + \frac{\xi}{a} - \frac{\varrho^2}{2 a^2} + \frac{3}{2}\,\frac{\xi^2}{a^2} + \dots\right\},$$

also

$$\frac{\varrho_1{}^2}{a^3} + \frac{2}{\varrho_1} = \frac{3}{a} + \frac{3\,\xi^2}{a^3} + \dots$$

Lassen wir die constanten Glieder und Glieder von der dritten und höheren Ordnung weg, so ist also

$$(5) \qquad 2\,\Omega = \frac{3 m_1 \xi^2}{a^3} + m_2 \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^3} + \frac{2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \right),$$

oder

$$2\,\Omega = 3 n^2 \xi^2 - \frac{2\, m_2}{a^3} \xi^2 + \frac{m_2}{a^3} \eta^2 + \frac{2\, m_2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Wir verfügen jetzt über die Einheiten für Abstand und Masse in der Weise, dass

$$(6) \qquad n = m_2 = 1\,,$$

und erhalten also

$$2\,\Omega = 3 \xi^2 + \frac{2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} - \frac{2}{a^3} \xi^2 + \frac{1}{a^3} \eta^2,$$

oder

$$(5^*) \qquad 2\,\Omega = \frac{2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + 3\,\xi^2 - \frac{2}{1 + m_1} \xi^2 + \frac{1}{1 + m_1} \eta^2.$$

In Folge der gemachten Wahl der Einheiten ist der Abstand a zwischen m_1 und m_2 durch die Formel

$$(6^*) \qquad a = \sqrt[3]{1 + m_1}$$

gegeben. Sind z. B. die beiden Massen einander gleich, so ist $a = \sqrt[3]{2}$, und wenn m_1 = Sonne, m_2 = Erde ist, so hat man

$$(6^{**}) \qquad a = \sqrt[3]{1 + 320000} = 68.4.$$

Die Differentialgleichungen (4) lauten, mit den angenommenen Einheiten,

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 \xi}{d t^2} - 2 \dfrac{d \eta}{d t} + \left(\dfrac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} - 3 + \dfrac{2}{1 + m_1} \right) \xi = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2 \eta}{d t^2} + 2 \dfrac{d \xi}{d t} + \left(\dfrac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} - \dfrac{1}{1 + m_1} \right) \eta = 0, \end{cases}$$

welches die Differentialgleichungen für die Bewegung von P *in der Umgebung der Masse* m_2 *sind.*

Für die Gleichungen (7) existirt das Integral von JACOBI:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\varrho} + \left(3 - \frac{2}{1+m_1}\right)\xi^2 + \frac{1}{1+m_1}\eta^2 - C, \tag{8}$$

und für die HILL'sche Grenzcurve gilt also hier die Gleichung:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + \left(3 - \frac{2}{1+m_1}\right)\xi^2 + \frac{1}{1+m_1}\eta^2 - C. \tag{8*}$$

Die Untersuchung von HILL über die periodischen Bahnen in der Nähe der Massen bezieht sich auf den Fall, dass m_1 sehr gross im Verhältniss zu m_2 ist. Seine Methode kann indessen für einen beliebigen Werth von m_1 benutzt werden. Wegen der grossen astronomischen Wichtigkeit des von HILL behandelten Falles werde ich mich hier auf diesen Fall beschränken.

Ist m_1 sehr gross, so findet man, dass die letzten Glieder der Gleichungen (7) viel kleiner als die vorhergehenden sind. Da diese Gleichungen unter der Voraussetzung erhalten worden sind, dass man die Glieder dritter oder höherer Ordnung in Ω, also die Glieder zweiter und höherer Ordnung in (7) vernachlässigt hat, so ist eine consequente Folgerung hieraus, dass auch die Glieder

$$\frac{2x}{1+m_1} \quad \text{und} \quad \frac{\eta}{1+m_1}$$

für sehr grosse Werthe von m_1, in welchem Fall sie mit ξ^2 und η^2 vergleichbar sind, vernachlässigt werden.

Unter dieser Vorausetzung nehmen die Gleichungen (7) folgende Form an

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{1}{\varrho^3} - 3\right)\xi = 0, \\ &\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{\varrho^3}\eta \qquad\quad = 0, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

wo

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Es sind dies die Gleichungen, die von Hill seinen Untersuchungen zu Grunde gelegt werden. Sie gewähren das Eigenthümliche, von jedem Parameter frei zu sein und werden deswegen als die canonischen Differentialgleichungen des Problems betrachtet. Diese Eigenschaft hängt mit der Wahl der Einheiten für Masse und Länge zusammen und Hill nennt aus diesem Grunde diese Einheiten canonische Einheiten. Wir bemerken aber, dass diese Eigenschaft verloren geht, wenn die Massen m_1 und m_2 von derselben Grössenordnung sind, in welchem Falle die Gleichungen (7) benutzt werden müssen.

Aus (9) erhält man das Integral

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\varrho} + 3\xi^2 - C. \tag{10}$$

Die Gleichung der Grenzcurve ist also

$$\frac{2}{\varrho} + 3\xi^2 - C = 0. \tag{10*}$$

Diese Curve ist natürlich eine vereinfachte Form der allgemeinen Grenzcurve für das asteroidische Drei-Körperproblem, die wir in § 3 ausführlich discutirt haben. Wir können uns deswegen in Bezug auf die Eigenschaften von (10*) kurz fassen.

Jedem Werth von ξ entspricht ein bestimmter Werth von ϱ — die Grenzcurve ist also symmetrisch zur ξ-Achse. Für jeden Werth von ϱ erhält man entweder keinen Werth oder zwei Werthe von ξ. Diese sind einander, dem absoluten Betrag nach gleich, haben aber verschiedenes Vorzeichen. Die Curve ist also auch zur η-Achse symmetrisch.

Die Curve ist eine algebraische Curve 6ten Grades.

Die ξ-Coordinate kann nicht beliebig gross werden. Der Maximalwerth ist offenbar durch die Ungleichheit

$$-\sqrt{\frac{C}{3}} < \xi < \sqrt{\frac{C}{3}}$$

gegeben. Wenn η ins Unendliche wächst, nähert sich ξ einem von diesen Grenzwerthen und die Curve hat also zwei geradlinige Asymptoten parallel der η-Achse im Abstande $\xi = \pm \sqrt{\frac{C}{3}}$.

Zwischen diesen Linien hängt der Verlauf der Curve vom Werthe von C ab.

Die η-Achse wird nur in zwei Punkten geschnitten, welche durch

$$\eta = \pm \frac{2}{C} \tag{11}$$

gegeben sind.

Für die Schnittpunkte der Curve mit der X-Achse erhält man die Gleichung dritten Grades

$$\xi^3 - \tfrac{1}{3} C \xi + \tfrac{2}{3} = 0. \tag{12}$$

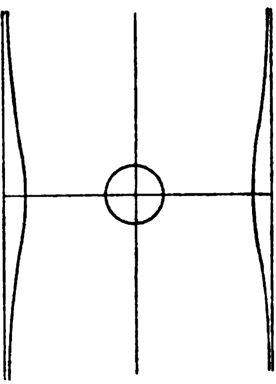


Fig. 9. Grenzcurve für grosse C-Werthe.

Ist C sehr gross, so besteht die Curve aus einer sehr kleinen geschlossenen Curve um m_2 und zwei Zweigen, welche sich den Asymptoten nähern (Fig. 9).

Wenn C abnimmt, so kommt man zuletzt zu einem Werth C_1, für welchen die innere Curve und die äusseren Curven zusammenfliessen. Die Gleichung (12) muss dann eine Doppelwurzel haben. Dies findet für

$$C = 3\sqrt[3]{3} \tag{13}$$

statt, d. h. für

$$C = 4.326.$$

Der entsprechende Werth für ξ ist

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 0.6934. \tag{13*}$$

Die so bestimmten Punkte fallen mit den Librationspunkten L_1 und L_2 zusammen (Fig. 10).

Ist $C < 4.326$, so besteht die Grenzcurve aus zwei offenen Zweigen (Fig. 11).

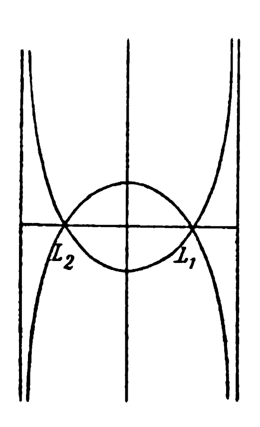


Fig. 10.
Grenzcurve für $C = 3\sqrt[3]{3}$.

Fig. 11.
Grenzcurve für $C < 3\sqrt[3]{3}$.

So oft $C > 4.326$ ist, muss eine beliebige Bahncurve in der Umgebung von m_2 innerhalb der kleinen Grenzcurve bleiben und man sagt dann, dass die Bewegung *stabil* ist.

Betrachtet man das System *Erde—Sonne*, so ist der Abstand zwischen m_1 und m_2, in canonischen Einheiten ausgedrückt, wie schon bewiesen ist, gleich 68.4. Der Librationspunkt liegt also im Abstande $\frac{a}{100}$ von m_2, was mit dem in § 1 erhaltenen Resultate übereinstimmt.

Bei der Aufsuchung der periodischen Lösungen der Differentialgleichungen (9) kann man zunächst zwei verschiedene Wege einschlagen.[1] Entweder geht man von gewissen Anfangszuständen aus, berechnet mittelst *mechanischer Quadratur* die entsprechende Bahncurve und variirt dann die Anfangszustände, bis man zu einer Curve gelangt, die in sich selbst zurückkehrt. Oder man setzt in

[1] Es giebt natürlich auch andere Methoden, die hier möglicherweise zur Anwendung kommen können, z. B. solche, die auf rein analytischen Betrachtungen beruhen.

(9) für ξ und η periodische Reihen ein, und sucht mittelst der Gleichungen (9) die Coefficienten in diesen Reihen zu bestimmen.

In Betracht der complicirten Beschaffenheit der Gleichungen (9) scheint es *a priori* kaum erspriesslich, den letzteren von diesen Wegen zu versuchen. Nichtsdestoweniger hat HILL die Kühnheit gehabt, dies Problem anzugreifen, und es ist ihm auch in der That gelungen, die Schwierigkeiten des Problems zu überwinden, und es, wenigstens in einem für die Praxis sehr wichtigen Fall, allgemein zu lösen.

Ein Haupthinderniss für diese Behandlungsweise liegt in dem Vorhandensein in den Differentialgleichungen von negativen Potenzen des Abstandes ϱ. Es liegt auf der Hand, dass es in der That unüberwindlich wäre, Recursionsformeln für die Coefficienten aufzustellen, wenn es nothwendig ist, sich der Gleichungen (9) direct zu bedienen.

Diese Schwierigkeit überwindet HILL in der Weise, dass er mittelst des JACOBI'schen Integrals $1:\varrho$ aus den Differentialgleichungen wegschafft. Diese Elimination geschieht in der folgenden Weise.

Indem man die beiden Gleichungen (9) mit bez. $-\eta$ und ξ und mit bez. ξ und η multiplicirt und die Resultate addirt, erhält man:

$$(14)\quad \begin{cases} \xi\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + 2\left(\xi\dfrac{d\xi}{dt} + \eta\dfrac{d\eta}{dt}\right) + \qquad 3\xi\eta = 0, \\[2ex] \xi\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \eta\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - 2\left(\xi\dfrac{d\eta}{dt} - \eta\dfrac{d\xi}{dt}\right) + \dfrac{1}{\varrho} - 3\xi^2 = 0. \end{cases}$$

Das JACOBI'sche Integral giebt aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}C$$

und mit Hilfe desselben kann die zweite Gleichung (14) in der Form

$$(14^*)\quad \begin{cases} \xi\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \eta\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - 2\left(\xi\dfrac{d\eta}{dt} - \eta\dfrac{d\xi}{dt}\right) + \\[2ex] \qquad + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\eta}{dt}\right)^2\right] - \dfrac{9}{2}\xi^2 + \dfrac{1}{2}C = 0 \end{cases}$$

geschrieben werden.

Die Gleichung (14*) und die erste Gleichung (14) können zusammen die ursprünglichen Differentialgleichungen (9) ersetzen. Die Constante C wird als gegeben betrachtet. Indem man hier für ξ und η unendliche FOURIER'sche Reihen einführt, bekommt man für die Coefficienten Recursionsformeln, die zwar alle eine unendliche Zahl von Coefficienten enthalten, die aber nur vom zweiten Grade sind. Die Gleichungen (9) würden zu Recursionsformeln vom achten Grad geführt haben.

Die Aufstellung der Recursionsformeln wird von HILL in folgender Weise ausgeführt.

Zuerst führt er für ξ und η zwei neue abhängige Veränderliche u und s durch die Gleichungen

$$(15)\qquad \begin{cases} u = \xi + \sqrt{-1}\,\eta, \\ s = \xi - \sqrt{-1}\,\eta \end{cases}$$

ein, so dass

$$u\,s = \xi^2 + \eta^2 = \varrho^2,$$

und erhält die neuen Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{d t^2} + 2\sqrt{-1}\,\dfrac{d u}{d t} + \dfrac{u}{(u\,s)^{3/2}} - \dfrac{3}{2}(u + s) = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2 s}{d t^2} - 2\sqrt{-1}\,\dfrac{d s}{d t} + \dfrac{s}{(u\,s)^{3/2}} - \dfrac{3}{2}(u + s) = 0. \end{cases}$$

Es ist auch angemessen, für t eine neue unabhängige Veränderliche einzuführen.

Wenn nämlich zu diesen Gleichungen ein periodisches Integral mit der Periode

$$\frac{2\pi}{\nu}$$

existirt, so können, nach dem Theorem von FOURIER, die Coordinaten nach den positiven und den negativen Potenzen von

$$\zeta = e^{\sqrt{-1}\,\nu(t-t_0)}, \tag{17}$$

wo t_0 eine Integrationsconstante bezeichnet, entwickelt werden.

Der Werth der Zahl ν ist vorläufig unbestimmt.

Wird mittelst (17) ζ als unabhängige Veränderliche eingeführt, bekommt man die folgenden Differentialgleichungen

$$\tag{18} \left\{ \begin{aligned} &\nu^2 \zeta^2 \frac{d^2 u}{d\zeta^2} + (\nu^2 + 2\nu)\zeta \frac{du}{d\zeta} - \frac{u}{(us)^{3/2}} + \frac{3}{2}(u+s) = 0, \\ &\nu^2 \zeta^2 \frac{d^2 s}{d\zeta^2} + (\nu^2 - 2\nu)\zeta \frac{ds}{d\zeta} - \frac{s}{(us)^{3/2}} + \frac{3}{2}(u+s) = 0, \end{aligned} \right.$$

oder

$$\tag{18*} \left\{ \begin{aligned} &\nu^2 \zeta \frac{d\left[\zeta \frac{du}{d\zeta}\right]}{d\zeta} + 2\nu\zeta \frac{du}{d\zeta} - \frac{u}{(us)^{3/2}} + \frac{3}{2}(u+s) = 0, \\ &\nu^2 \zeta \frac{d\left[\zeta \frac{ds}{d\zeta}\right]}{d\zeta} - 2\nu\zeta \frac{ds}{d\zeta} - \frac{s}{(us)^{3/2}} + \frac{3}{2}(u+s) = 0. \end{aligned} \right.$$

Es ist vortheilhaft, das folgende von HILL benutzte Symbol einzuführen:

$$D = \zeta \frac{d}{d\zeta}, \tag{19}$$

so dass nach (18*)

$$\left[\nu^2 D^2 + 2\nu D + \frac{3}{2} - \frac{1}{(us)^{3/2}}\right] u + \frac{3}{2}\, s = 0,$$

$$\left[\nu^2 D^2 - 2\nu D + \frac{3}{2} - \frac{1}{(us)^{3/2}}\right] s + \frac{3}{2}\, u = 0,$$

oder, wenn man

$$\nu = \frac{1}{m}$$

setzt,

$$\tag{19*} \left\{ \begin{aligned} &\left[D^2 + 2mD + \frac{3}{2} m^2 - \frac{m^2}{(us)^{3/2}}\right] u + \frac{3}{2} m^2 s = 0, \\ &\left[D^2 - 2mD + \frac{3}{2} m^2 - \frac{m^2}{(us)^{3/2}}\right] s + \frac{3}{2} m^2 u = 0. \end{aligned} \right.$$

Das JACOBI'sche Integral lautet mit den eingeführten Veränderlichen:

$$DuDs + \frac{2m^2}{\sqrt{us}} + \frac{3}{4}m^2(u+s)^2 = C. \tag{20}$$

Das Glied $1:(us)^{3/2}$ wird, mit Hilfe von (20), in folgender Weise aus (19*) eliminirt.

Man multiplicirt die Gleichungen (19*) mit bez. s und u, addirt und subtrahirt, und erhält dann die Gleichungen

$$uD^2s + sD^2u - 2m(uDs - sDu) +$$
$$+ \frac{3}{2}m^2(u^2 + s^2 + 2us) - \frac{2m^2}{\sqrt{us}} = 0,$$
$$uD^2s - sD^2u - 2m(uDs + sDu) +$$
$$+ \tfrac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0,$$

oder wenn (20) zu der ersten dieser Gleichungen addirt wird:

$$(21)\quad \begin{cases} uD^2s + sD^2u + DuDs - 2m(uDs - sDu) \\ \qquad\qquad + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 = C, \\ uD^2s - sD^2u - 2m(uDs + sDu) \\ \qquad\qquad + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0. \end{cases}$$

Für das Symbol D gilt das Rechengesetz

$$D(ab) = aDb + bDa,$$

so dass

$$D(uDs - sDu) = uD^2s - sD^2u,$$

$$D^2(us) = uD^2s + sD^2u + 2DuDs,$$

und folglich erhält man aus (21):

$$(22)\begin{cases} D^2(us) - Du\,Ds - 2m(u\,Ds - s\,Du) + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 = C, \\ D[u\,Ds - s\,Du - 2m\,us] + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) \qquad = 0, \end{cases}$$

in welche elegante Form HILL die Differentialgleichungen gebracht hat, und welche Gleichungen es erlauben, die Recursionsformeln für die Coefficienten ziemlich leicht aufzustellen.

Von den periodischen Bahnen, die sich mit den gegebenen Differentialgleichungen vereinbaren lassen, werden wir diejenigen betrachten, welche zu irgend einer Zeit die Achse der ξ-Coordinaten *senkrecht* schneiden. Zu dieser Kategorie von Bahncurven gehören diejenigen Bahnen, die nach *einem* Umlauf von P um m_2 in sich selbst zurückkehren. Wird für die Integrationsconstante t_0 ein solcher Werth gewählt, dass die Achse der ξ-Coordinaten zur Zeit t_0 von der Bahncurve senkrecht geschnitten wird, so wird offenbar für eine solche Curve die ξ-Coordinate durch eine FOURIER'sche Reihe ausgedrückt, welche nur die *Cosinus* der Vielfachen von

$$\nu(t - t_0)$$

enthält, wogegen die η-Coordinate durch eine entsprechende *Sinus*-Reihe dargestellt wird. HILL beschränkt seine Untersuchung auf solche Bahnen, die zur Zeit t_0 zur Achse der ξ-Coordinaten senkrecht sind.

Es zeigt sich, dass man in diesem Falle FOURIER'sche Reihen mit nur *ungeraden* Vielfachen von $\nu(t - t_0)$ ansetzen kann, so dass

$$\xi = A_0 \cos\nu(t - t_0) + A_1 \cos 3\nu(t - t_0) + A_2 \cos 5\nu(t - t_0) + \dots,$$

$$\eta = B_0 \sin\nu(t - t_0) + B_1 \sin 3\nu(t - t_0) + B_2 \sin 5\nu(t - t_0) + \dots,$$

oder wenn man

$$A_i = a_i + a_{-i-1}$$

$$B_i = a_i - a_{-i-1}$$

setzt und

$$\tau = \nu(t - t_0) \tag{23}$$

einführt:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos(2i+1)\tau, \\ \eta &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \sin(2i+1)\tau. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Führt man hier noch die durch (17) definirte Veränderliche ζ und gleichzeitig u und s ein, so wird

$$\left\{\begin{aligned} u &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \qquad \zeta^{2i+1}, \\ s &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{-i-1}\, \zeta^{2i+1}, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

welche Reihen in (22) einzuführen sind, um die gesuchten Recursionsformeln für die Coefficienten a_i zu erhalten.

Werden zwei Potenzreihen von der Form

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \zeta^{2i+1} \quad \text{und} \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j \zeta^{2j+1}$$

mit einander multiplicirt, so wird das Product eine Potenzreihe von folgender Form

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \zeta^{2i+1} \times \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_j \zeta^{2j+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i b_{j-i-1} \right] \zeta^{2j}, \tag{26}$$

und da weiter

$$Du = \sum (2i+1) a_i \zeta^{2i+1}, \qquad Ds = \sum (2i+1) a_{-i-1} \zeta^{2i+1},$$

so erhalten wir folgende Reihen für us, u^2 u. s. w.

$$
\begin{aligned}
u s &= \sum_j \left[\sum_i a_i a_{i-j}\right] \zeta^{2j}, \\
u^2 &= \sum_j \left[\sum_i a_i a_{-i+j-1}\right] \zeta^{2j}, \\
s^2 &= \sum_j \left[\sum_i a_i a_{-i-j-1}\right] \zeta^{2j}, \\
D u D s &= -\sum_j \left[\sum_i (2i+1)(2i-2j+1) a_i a_{i-j}\right] \zeta^{2j}, \\
u D s - s D u &= -\sum_j \left[\sum_i (4i-2j+2) a_i a_{i-j}\right] \zeta^{2j}, \\
u D s + s D u &= \sum_j \left[\sum_j 2j\, a_i a_{i-j}\right] \zeta^{2j},
\end{aligned}
$$

und weiter:

$$
\begin{aligned}
D^2(u s) &= \sum_j \left[\sum_i (2j)^2 a_i a_{i-j}\right] \zeta^{2j}, \\
(u+s)^2 &= \sum_j \left[\sum_i a_i (a_{-i+j-1} + a_{-i-j-1} + 2 a_{i-j})\right] \zeta^{2j}, \\
u^2 - s^2 &= \sum_j \left[\sum_i a_i (a_{-i+j-1} - a_{-i-j-1})\right] \zeta^{2j}, \\
u D^2 s - s D^2 u &= -\sum_j \left[\sum_i 2j(4i-2j+2) a_i a_{i-j}\right] \zeta^{2j}, \\
&= D(u D s - s D u).
\end{aligned}
$$

In diesen Formeln müssen i und j alle ganzen Zahlwerthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen.

Setzen wir nun die obigen Ausdrücke in (22) hinein, und bestimmen wir die a_i in der Weise, dass der Coefficient von ζ^{2j} verschwindet, so erhalten wir die folgenden Recursionsformeln:

$$
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} [4j^2 a_i a_{i-j} + (2i+1)(2i-2j+1) a_i a_{i-j} + 2m(4i-2j+2) a_i a_{i-j}
$$
$$
+ \tfrac{9}{4} m^2 a_i (a_{-i+j-1} + a_{-i-j-1} + 2 a_{i-j})] = 0,
$$
$$
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[2j(-(4i-2j+2) - 2m)\, a_i a_{i-j} + \frac{3m^2}{2} a_i (a_{-i+j-1} - a_{-i-j-1})\right]
$$
$$
= 0
$$

oder

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[(2i+1)(2i-2j+1)+4j^2+4(2i-j+1)m+\tfrac{9}{2}m^2\right]a_i a_{i-j}+\\&+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\tfrac{9}{4}m^2 a_i(a_{-i+j-1}+a_{-i-j-1})=0,\end{aligned}\right. \tag{27}$$

$$4j\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(2i-j+1+m)a_i a_{i-j}-\tfrac{3}{2}m^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_i(a_{-i+j-1}-a_{-i-j-1})=0. \tag{28}$$

Diese Formeln gelten für alle Werthe von j zwischen $-\infty$ und $+\infty$ mit Ausnahme von $j=0$, für welchen Werth man erhält:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[(2i+1)^2+4(2i+1)m+\tfrac{9}{2}m^2\right]a_i^2+\\&+\tfrac{9}{4}m^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}2(a_i a_{-i-1})=C.\end{aligned}\right. \tag{29}$$

Die Gleichungen (27) und (28) sind nicht von einander unabhängig. Dies zeigt sich folgendermassen.

Wird (27) mit 2, (28) mit 3 multiplicirt und die Resultate subtrahirt und addirt, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[8i^2-8i(4j-1)+20j^2-16j+2+4m(4i-5j+2)+9m^2\right]a_i a_{i-j}\\&+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}9m^2 a_i a_{-i+j-1}=0,\end{aligned}\right. \tag{30}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[8i^2+8i(2j+1)-4j^2+8j+2+4m(4i+j+2)+9m^2\right]a_i a_{i-j}\\&+9m^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_i a_{-i-j-1}=0.\end{aligned}\right. \tag{31}$$

Man findet aber leicht, dass diese beiden Gleichungen identisch sind. Wenn nämlich in (30) i gegen $i+j$ vertauscht wird, und dann j gegen $-j$, so geht diese Gleichung in (31) über. Es

ist also, wenn j sowohl positive wie negative Werthe annimmt, nicht nöthig, mehr als eine dieser Gleichungen zu betrachten.

Die Gleichungen (31) und (29) repräsentiren ein System von unendlich vielen Gleichungen zweiten Grades, zwischen denen eine unendliche Zahl von Coefficienten a_0, $a_{\pm 1}$, $a_{\pm 2}$ u. s. w. zu eliminiren ist. Hill, der ein Meister in solchen Eliminationen ist, schreckt nicht vor dieser Aufgabe zurück. Er ist indessen dabei gezwungen, eine Einschränkung im Probleme zu machen. In den obigen Bedingungsgleichungen kommt ausser dem Coefficienten a_i und den ganzen Zahlen i und j eine Grösse m vor, die als ein Parameter betrachtet werden kann. Die Coefficienten a_i und a_j sind als Functionen dieses Parameters zu betrachten, und zwar lässt sich *a priori* erwarten, dass diese Functionen einen sehr complicirten Charakter haben. Einen allgemeinen Ausdruck für a_i, der für alle Werthe von m gültig ist, herzustellen, ist kaum möglich. Man hat deswegen nöthig, den Werth von a_i in der Umgebung eines bestimmten Werthes von m zu untersuchen, und zwar lässt sich diese Untersuchung verhältnissmässig leicht in der Umgebung von $m = 0$ ausführen. Die entsprechenden Reihen sind für die Anwendungen auf praktische astronomische Probleme sehr wichtig und werden von Hill ausführlich auseinandergesetzt.

Da die Periode die Länge $2\pi m$ hat, so handelt es sich bei kleinen m um solche Bahnen, die nach kurzer Zeit — und zwar einem einzigen Umlauf um m_2 — in sich selbst zurückkehren. Es unterliegt aber keinem Zweifel, dass auch periodische Bahnen von längerer Periode existiren — wir werden in einem der folgenden Paragraphen diese Bahnen von einem anderen Gesichtspunkte studiren — und von ganz besonderem Interesse sind die Bahnen, die sehr grossen Werthen von m entsprechen. Es wäre deswegen sehr wichtig, die Lösung der Gleichungen (31) in der Umgebung von $m = \infty$ zu untersuchen, obgleich diese Untersuchung mit Schwierigkeiten verbunden zu sein scheint.[1]

---

[1] Es wird sich wahrscheinlich zeigen, dass die Fourier'schen Reihen untauglich sind, um solche Bahncurven darzustellen.

Was die Entwickelung in der Umgebung von $m = 0$ betrifft, so findet man unschwer, dass die Reihen für a_j von der Form

$$(32)\quad \begin{cases} a_j \;\; = m^{2j}\left(\alpha_j^{(0)} + \alpha_j^{(1)} m + \alpha_j^{(2)} m^2 + \ldots\right), \\ a_{-j} = m^{2j}\left(\alpha_{-j}^{(0)} + \alpha_{-j}^{(1)} m + \alpha_{-j}^{(2)} m^2 + \ldots\right) \end{cases}$$

sind, wo $\alpha_j^{(\nu)}$ gewisse Zahlencoefficienten bedeuten. Hill sucht aber nicht direct die Form von $a_{\pm j}$ als Potenzreihen nach m, sondern schlägt einen anderen Weg ein, der gewisse praktische Vortheile hat.

Wird in (30) und (31) i gleich Null und gleich j gesetzt, so findet man, dass diese Gleichungen die folgenden Glieder enthalten:

$$\begin{aligned} &[\;20j^2 - 16j + 2 - 4(5j-2)m + 9m^2]\, a_0 a_{-j} \\ +&[-4j^2 - \;\;8j + 2 - 4(\;j-2)m + 9m^2]\, a_0 a_j \end{aligned}$$

in (30) und

$$\begin{aligned} &[-4j^2 + \;\;8j + 2 + 4(\;j+2)m + 9m^2]\, a_0 a_{-j} \\ +&[\;20j^2 + 16j + 2 + 4(5j+2)m + 9m^2]\, a_0 a_j \end{aligned}$$

in (31).

Man findet weiter, dass in (30) und (31) auch andere Glieder vorkommen, die mit a_j und a_{-j} multiplicirt sind, dass aber diese Glieder von der Form

$$m^4 a_{\pm j}$$

sind, oder mit einer höheren Potenz von m als der vierten multiplicirt sind.

Ausserdem geht hervor, dass sämmtliche Glieder in (30) und (31), unter Voraussetzung der Form (32) für die Coefficienten, wenigstens von der Ordnung m^{2j} sind, und dass in den Gliedern von der Ordnung m^{2j} nur die Coefficienten a_0, $a_{\pm 1}$, $a_{\pm 2}$, ..., $a_{\pm j}$ vorkommen. Diese Gleichungen sind also geeignet, durch successive Annäherungen die Coefficienten $a_{\pm j}$ zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke verschafft sich Hill zuerst Gleichungen, die nur a_j und nicht a_{-j} enthalten, wenigstens nicht die Glieder

von der Ordnung m^{2j} in a_{-j}, was man offenbar dadurch erhält, dass man die Gleichung (30) mit

$$-\ 4j^2 + \ 8j + 2 + 4(\ j + 2)m + 9m^2$$

und die Gleichung (31) mit

$$-20j^2 + 16j - 2 + 4(5j - 2)m - 9m^2$$

multiplicirt und die Resultate addirt.

Man erhält dann die Gleichung

$$- \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 48ij[4i(j-1) + 4j^2 + 4j - 2 - 4m(i-j+1) + m^2]\, a_i a_{i-j} +$$

$$+ 9m^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [-\ 4j^2 + \ 8j + 2 + 4\ (\ j + 2)m + 9m^2]\, a_i a_{-i+j-1} +$$

$$+ 9m^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [-20j^2 + 16j - 2 + 4m(5j-2) \ - 9m^2]\, a_i a_{-i-j-1} = 0.$$

Wird diese Gleichung mit dem Coefficienten von $a_j a_0$, der gleich

$$48j^2[8j^2 - 2 - 4m + m^2]$$

ist, dividirt, und führt man mit Hill die Bezeichnungen

$$(33^*)\quad \begin{cases} [j, i] = -\dfrac{i}{j} \cdot \dfrac{4(j-1)i + 4j^2 + 4j - 2 - 4m(i-j+1) + m^2}{8j^2 - 2 - 4m + m^2} \\[2ex] [j] = -\dfrac{3m^2}{16j^2} \cdot \dfrac{4j^2 - 8j - 2 - 4m(j+2) - 9m^2}{8j^2 - 2 - 4m + m^2} \\[2ex] (j) = -\dfrac{3m^2}{16j^2} \cdot \dfrac{20j^2 - 16j + 2 - 4m(5j-2) + 9m^2}{8j^2 - 2 - 4m + m^2} \end{cases}$$

ein, so nimmt die Gleichung die Form

$$(33)\qquad 0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [j, i]\, a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} + (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i-j-1}$$

an. Die Coefficienten haben die Eigenschaften

$$[j, 0] = 0, \quad [j, j] = -1,$$

mit Ausnahme des Coefficienten [0, 0], der unbestimmt wird.

In (33) kann j positive oder negative Werthe annehmen. Die zweite *oder* die dritte Summe in (33) ist je nach dem Zeichen von j um vier Ordnungen in m kleiner als die Glieder der niedrigsten Ordnung in der Gleichung und man kann deswegen die Gleichung genähert in einer der folgenden Formen schreiben:

$$(33^{**}) \quad \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [\;\; j, i] \, a_i a_{i-j} + [\;\; j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} = 0, \\ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [-j, i] \, a_i a_{i+j} + (-j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} = 0. \end{cases}$$

Wird hier nach einander $j = 1, 2, 3$ u. s. w. gesetzt, erhält man folgende Gleichungen, die erlauben, die Werthe von $a_{\pm j}$ mit grosser Annäherung zu erhalten. Der Fehler von $a_{\pm j}$ ist in jedem Fall von der Ordnung

$$m^{2j+4}.$$

$$a_0 a_1 \;\; = [1] \, a_0 a_0,$$

$$a_0 a_{-1} = (-1) \, a_0 a_0,$$

$$a_0 a_2 \;\; = [2] (a_0 a_1 + a_1 a_0) + [2, 1] \, a_1 a_{-1},$$

$$a_0 a_{-2} = (-2)(a_0 a_1 + a_1 a_0) + [-2, -1] \, a_1 a_{-1},$$

$$a_0 a_3 \;\; = [3] (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [3, 1] \, a_1 a_{-2} + [3, 2] \, a_2 a_{-1},$$

$$a_0 a_{-3} = (-3)(a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [-3, -1] a_{-1} a_2 + [-3, -2] a_{-2} a_1,$$

u. s. w.

Erst hier führt Hill Entwickelungen nach den Potenzen von m ein. Es ist nicht ohne Absicht, dass er diese Entwickelung aufgeschoben hat, und Hill zeigt hier nochmals seinen scharfen Blick für die Bedürfnisse des numerischen Rechnens. Wenn man die

obigen Ausdrücke nach Potenzen von m entwickeln will, so ist die Convergenz dieser Entwickelungen von der Convergenz der Entwickelung der Nenner rechter Seite abhängig. Diese Nenner haben die Form

$$8j^2 - 2 - 4m + m^2,$$

und ihre Entwickelung nach Potenzen von m ist offenbar um so schneller, je grösser j ist. Die Convergenz ist am ungünstigsten für $j = 1$, in welchem Falle der Nenner lautet

$$6 - 4m + m^2.$$

Wenn ein Bruch mit diesem Nenner nach Potenzen von m entwickelt wird, so ist diese Entwickelung convergent, so lange m kleiner als der absolute Betrag der Wurzeln der Gleichung

$$6 - 4m + m^2 = 0$$

ist, d. h. für

$$|m| < \sqrt{6}.$$

Nun lautet aber ein bekannter Satz aus der Theorie der Reihen, dass, wenn eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

mit dem Convergenzradius R gegeben ist, die Relation

$$R = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

stattfindet. *Je grösser der Convergenzradius ist, desto schneller nehmen also die Coefficienten A_n an Grösse ab.* Wenn es also möglich ist, für m eine Grösse $\varkappa$, *die sehr wenig von m abweicht*, einzuführen, und es sich zeigen würde, dass die Entwickelung nach Potenzen von $\varkappa$ einen grösseren Convergenzradius besitzt, als $\sqrt{6}$, so wird die

Entwickelung der Coefficienten a_i nach Potenzen von $\varkappa$ vor einer Entwickelung nach Potenzen von m vorzuziehen sein.

Das Problem ist insofern unbestimmt, als der functionale Zusammenhang zwischen m und $\varkappa$ beliebig gewählt werden kann. Nehmen wir mit Hill an, dass

$$m = \frac{\varkappa}{1 + \alpha\varkappa},$$

und lassen wir α vorläufig unbestimmt, so werden die Nenner, in $\varkappa$ ausgedrückt, von der Form

$$(1 - 4\alpha + 6\alpha^2)\varkappa^2 - (4 - 12\alpha)\varkappa + 6.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, so erhält man für das Quadrat des Modulus der Wurzeln den Ausdruck

$$\frac{6}{1 - 4\alpha + 6\alpha^2},$$

welcher ein Maximum für

$$\alpha = \tfrac{1}{3}$$

hat. Dies Maximum ist gleich 18, so dass die Entwickelung des Nenners für $|\varkappa| < \sqrt{18}$ convergirt. Da man

$$m = \frac{\varkappa}{1 + \frac{1}{3}\varkappa} \tag{34}$$

gesetzt hat, so wird es aber gleichzeitig nothwendig, den Nenner $1 + \frac{1}{3}\varkappa$ nach Potenzen von $\varkappa$ zu entwickeln, welche Entwickelung nur für $|\varkappa| < 3$ convergirt. Der Convergenzradius ist also gleich 3, wogegen der Convergenzradius in der Entwickelung nach Potenzen von m gleich $\sqrt{6} = 2.45$ ist. Hill gewinnt also eine raschere Convergenz, indem er nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt.

Er würde eine noch stärkere Convergenz erreicht haben, wenn er einen anderen Werth für α eingeführt hätte. Die vortheilhafteste

Wahl von α wird offenbar erhalten, wenn der absolute Betrag der Wurzeln des Nenners gleich der Wurzel der Gleichung $1 + \alpha x = 0$ gesetzt wird, also wenn

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{6}{1 - 4\alpha + 6\alpha^2},$$

d. h. für $\alpha = \frac{1}{4}$, so dass man die Substitution

$$m = \frac{x}{1 + \frac{1}{4}x}$$

macht, in welchem Falle der (gemeinsame) Convergenzradius gleich 4 wird.

Indem Hill durch (34) x für m einführt, entwickelt er die Coefficienten a_i nach Potenzen von x. Die ersten Glieder in diesen Entwickelungen lauten bis zu der sechsten Potenz von x

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + \frac{21}{144}x^4 - \frac{1}{6}x^5 - \frac{103767}{331776}x^6 - \dots$$

$$\frac{a_{-1}}{a_0} = -\frac{19}{16}x^2 - \frac{7}{8}x^3 + \frac{11}{144}x^4 + \frac{5}{36}x^5 - \frac{2644}{331776}x^6 + \dots$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{25}{256}x^4 + \frac{553}{1920}x^5 + \frac{7486}{28800}x^6 + \dots$$

$$\frac{a_{-2}}{a_0} = \quad * \quad + \frac{69}{1920}x^5 + \frac{1863}{28800}x^6 + \dots$$

$$\frac{a_3}{a_0} = \frac{833}{12288}x^6 - \dots$$

$$\frac{a_{-3}}{a_0} = \frac{64}{12288}x^6 + \dots$$

Wir ziehen indessen vor, uns im Folgenden des Parameters m zu bedienen. In demselben ist nach Hill ausgedrückt:

$$
(35) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{a_1}{a_0} &= \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{12} m^4 + \frac{11}{36} m^5 - \frac{30749}{2^{12}.3^3} m^6 - \ldots \\
\frac{a_{-1}}{a_0} &= -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \frac{43}{36} m^4 - \frac{14}{27} m^5 - \frac{7381}{2^{10}.3^4} m^6 + \ldots \\
\frac{a_2}{a_0} &= \frac{25}{256} m^4 + \frac{803}{1920} m^5 + \frac{6109}{2^5.3^2.5^2} m^6 + \ldots \\
\frac{a_{-2}}{a_0} &= \quad * \quad + \frac{23}{640} m^5 + \frac{299}{2^5.3.5^2} m^6 + \ldots \\
\frac{a_3}{a_0} &= \frac{833}{2^{12}.3} m^6 + \ldots \\
\frac{a_{-3}}{a_0} &= \frac{1}{192} m^6 + \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Die Formel (29) giebt uns C durch a_0 und m ausgedrückt. Werden die obigen Werthe von a_1, a_{-1} u. s. w. eingesetzt, so erhält man

$$
(36) \quad C = a_0^{\,2} \left\{ 1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 + * - \frac{1147}{128} m^4 - \frac{1399}{96} m^5 - \frac{2047}{256} m^6 - \ldots \right\}.
$$

Von den Grössen a_0, C und m ist nur eine als willkürlich zu betrachten. Wenn man nämlich in das JACOBI'sche Integral

$$
D u D s + \frac{2 m^2}{\sqrt{u s}} + \frac{3}{4} m^2 (u + s)^2 = C
$$

die Reihen für u und s einführt, so erhält man offenbar — indem man das constante Glied linker Seite gleich C setzt — einen Ausdruck von der Form:

$$
C = a_0^{\,2} P_1 + \frac{P_2}{a_0},
$$

wo P_1 und P_2 Potenzreihen in m bezeichnen, von denen P_2 mit m^2 multiplicirt ist. Wird C zwischen dieser Gleichung und (36)

eliminirt, so wird a_0 durch m ausgedrückt. Man bekommt in dieser Weise

$$a_0 = m^{2/3}\left\{1 - \frac{2}{3}m + \frac{7}{18}m^2 - \frac{4}{81}m^3 + \frac{19565}{62208}m^4 - \dots\right\} \tag{37}$$

Diese Reihe wird von Hill in der Form

$$a_0 = \frac{m^{2/3}}{(1+m)^{2/3}}\left\{1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2304}m^4 - \frac{67}{288}m^5 - \frac{45298}{41472}m^6 - \dots\right\}$$

geschrieben. Aus (36) und (37) erhalten wir für C die Gleichung:

$$C = m^{4/3}\left\{1 + \frac{8}{3}m + \frac{7}{18}m^2 - \frac{140}{81}m^3 - \frac{39583}{7776}m^4 - \dots\right\}. \tag{38}$$

Die analytische Darstellung der periodischen Bahnen in der Nähe einer der anziehenden Massen ist hiermit vollständig erledigt. Wenn die synodische Umlaufszeit der unendlich kleinen Masse (des Satelliten) gegeben ist, so geben die obigen Formeln unmittelbar den Ausdruck für die Coordinaten als Functionen der Zeit. Es ist vortheilhaft, die Formeln (24) etwas abzuändern, indem man erst Polarcoordinaten ϱ und φ einführt, so dass

$$\xi = \varrho\cos\varphi,$$
$$\eta = \varrho\sin\varphi$$

ist.

Die Gleichungen (24) können dann in der Form

$$\left\{\begin{aligned} \varrho\cos(\varphi - \tau) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos 2i\tau, \\ \varrho\sin(\varphi - \tau) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \sin 2i\tau \end{aligned}\right. \tag{39}$$

geschrieben werden.

Die synodische Umlaufszeit des Erdmondes ist 12.37 mal kleiner als ein Jahr. Setzen wir

$$m = \frac{1}{12.37},$$

erhalten wir also die periodische Bahn eines Satelliten, der dieselbe synodische Umlaufszeit besitzt wie der Mond. Die Reihen (39) haben hier folgendes Aussehen

$$\begin{aligned} r\cos(\varphi - \tau) = a_0\{1 &- 0.007\,180\,039\,455 \cos 2\tau \\ &+ 0.000\,006\,042\,459 \cos 4\tau \\ &+ 0.000\,000\,032\,576 \cos 6\tau \\ &+ 0.000\,000\,000\,180 \cos 8\tau\}, \\ r\sin(\varphi - \tau) = a_0\{ &\; 0.010\,211\,454\,396 \sin 2\tau \\ &+ 0.000\,005\,714\,879 \sin 4\tau \\ &+ 0.000\,000\,027\,499 \sin 6\tau \\ &+ 0.000\,000\,000\,157 \sin 8\tau\}, \end{aligned}$$

wo

$$a_0 = \frac{m^{2/3}}{(1+m)^{2/3}}\, 0.999\,093\,141\,962$$

ist. Man muss sich erinnern, dass die „canonische" Längeneinheit, deren Werth wir für diesen Fall vorher angegeben haben, hier zu Grunde gelegt wird.

Die obigen Ausdrücke, welche von Hill in seiner Mondtheorie benutzt werden, geben ein vortreffliches Bild von der raschen Convergenz der Reihen.

Sämmtliche periodische Bahnen, die hier betrachtet werden, schneiden die Achse der ξ-Coordinaten senkrecht. Es ist von Interesse, die Relation zwischen dem Abstand — ξ_0 — dieses Schnittpunktes von m_2 und den Parameter m aufzusuchen.

Für $t = t_0$ erhalten wir

$$\xi_0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i$$

und aus (35) und (37) bekommt man also

$$(40) \quad \xi_0 = m^{2/3}\left\{1 - \frac{2}{3}m - \frac{11}{18}m^2 - \frac{89}{162}m^3 + \frac{1477}{7776}m^4 - \dots\right\}.$$

Die Umkehrung dieser Reihe ist von der Form

$$(40^*) \qquad m = \xi_0^{3/2}\{1 + \alpha_1 \xi_0^{3/2} + \alpha_2 \xi_0^{6/2} + \alpha_3 \xi_0^{9/2} + \dots\}.$$

Ich erinnere daran, dass die Länge der Periode den Ausdruck $2\pi m$ hatte. Die obigen Formeln zeigen, dass für die periodischen Bahnen, die hier in Betracht kommen, die Länge der Periode mit dem Abstande ξ_0 wächst, wenigstens wenn m sehr klein ist. Hierin liegt ein wichtiger Unterschied zwischen den periodischen Bahnen in der Umgebung von m_2 und den periodischen Bahnen in der Umgebung der Librationscentra. Für diese Bahnen war nämlich die Länge der Periode nicht vom Abstande von den Librationscentren abhängig, sondern hatte einen bestimmten Werth, der für *alle* periodischen Bahnen in der Nähe jedes Librationscentrums gemeinsam war.

Obgleich, für sehr kleine m, ξ_0 mit m stetig wächst, so ist dies aber nicht mehr der Fall, wenn m grösser wird. Wenn m wächst, kommt man zuletzt zu einem Maximalwerth, für welchen

$$(41) \qquad \frac{d\xi_0}{dm} = 0$$

ist, und wenn m noch grössere Werthe annimmt, zieht sich der Schnittpunkt der periodischen Curve mit der ξ-Achse gegen m_2 zurück.

Unter Anwendung der Reihe (40) bekommt man für (41) folgende Form

$$0 = \frac{2}{3} - \frac{10}{9}m - \frac{44}{27}m^2 - \frac{979}{486}m^3 - \dots,$$

welche Gleichung die Wurzel

$$m = \frac{1}{2.86}$$

hat, wobei aber zu bemerken ist, dass die hier vernachlässigten Glieder vierter und höherer Ordnung eine merkbare Correction dieses Werthes geben können.

Hill behandelt diese Frage nicht mittelst seiner analytischen Formeln — die aber erlauben, eine hinreichend genaue Discussion dieses Themas durchzuführen —, sondern mit Hilfe mechanischer Quadratur. Den Werth von m, der dem Maximalwerth von ξ_0 entspricht, erhält er ungefähr gleich 2.8.

Setzt man in den Formeln (39) $\tau = \frac{\pi}{2}$, so erhält man den Abstand des Schnittpunktes der Curve mit der Achse der η-Coordinaten. Wird dieser Abstand mit η_0 bezeichnet, so ist nach (24)

$$\eta_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$
$$- a_{-1} + a_2 - a_{-3} + \cdots,$$

oder nach (35)

$$\eta_0 = a_0 \left\{1 + m^2 + \frac{7}{6} m^3 + \frac{1633}{2304} m^4 + \ldots\right\}.$$

Wird der Werth von a_0 (37) hier eingesetzt, so erhält man

$$\eta_0 = m^{2/3} \left\{1 - \frac{2}{3} m + \frac{25}{18} m^2 + \frac{73}{162} m^3 - \ldots\right\}. \tag{42}$$

Bei sehr kleinem m wächst η_0 mit der Länge der Periode. Für die nähere Untersuchung der Werthe von η_0 ist die obige Darstellung unzureichend, und es genügt wahrscheinlich hier nicht höhere Potenzen von m mitzunehmen, sondern man muss zu mechanischer Quadratur oder Entwickelungen nach Potenzen der Zeit seine Zuflucht nehmen.

Setzt man in (39) $m = \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}$ u. s. w., so erhält man die Formeln, welche für einen Satelliten gelten, der 10, 9, 8 u. s. w. synodische Umläufe in der Zeit T macht. In dieser Weise, und zwar zum Theil unter Anwendung mechanischer Quadratur, erhält Hill die folgende Tafel:

Tabelle VII.

Periodische Bahnen in der Nähe von m_2.

Synodische Umläufe in der Zeit $T = \frac{1}{m}$	Schnittpunkt mit der ξ-Achse $= \xi_0$	Schnittpunkt mit der η-Achse $= \eta_0$	$\eta_0 : \xi_0$	Geschwindigkeit in Conjunction $= v_0$	Geschwindigkeit in Quadratur $= v_1$	$v_1 : v_0$	C
$12\frac{59}{160}$	0.17610	0.17864	1.01446	2.22295	2.16484	0.97386	6.50888
10	0.19965	0.20418	1.02271	2.06163	1.97693	0.95892	5.88686
9	0.21209	0.21813	1.02849	1.98780	1.88501	0.94853	5.61562
8	0.22652	0.23485	1.03678	1.90904	1.78250	0.93872	5.33878
7	0.24342	0.25543	1.04934	1.82721	1.66572	0.91162	5.05585
6	0.26332	0.28167	1.06969	1.74333	1.52851	0.87677	4.76409
5	0.28660	0.31699	1.10605	1.66247	1.35953	0.81777	4.46103
4	0.31232	0.36897	1.18138	1.60111	1.13480	0.70876	4.13277
3	0.33235	0.45973	1.38329	1.62141	0.79387	0.48962	3.72018
2	0.302	0.684	2.26	2.00	0.18	0.09	2.89
1.78265	0.27180	0.78190	2.87676	2.24102	0.00000	0.00000	2.55788

Der erste dieser Satelliten hat dieselbe synodische Umlaufszeit wie der Mond der Erde. Der in der letzten Zeile aufgenommene Satellit wird unten näher besprochen werden.

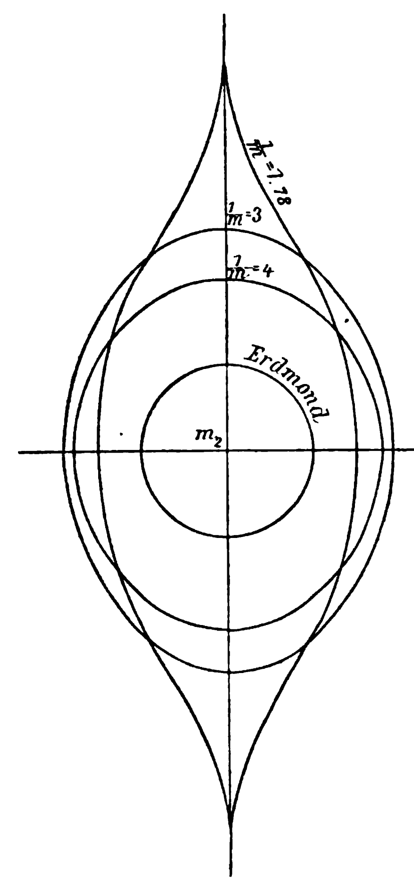


Fig. 12. Periodische Bahnen in der Nähe von m_2.

In Fig. 12 sind nach Hill einige der in Tabelle VII enthaltenen periodischen Bahnen gezeichnet, nämlich diejenigen, welche den Werten $\frac{1}{m} = 4$, 3, 1.78 entsprechen und ausserdem die Bahn des Erdmondes. Es ist ersichtlich, wie der Schnittpunkt mit der ξ-Achse für $\frac{1}{m} < 3$ sich der Masse m_2 nähert.

Die hier betrachteten periodischen Bahnen schneiden sämmtlich die ξ-Achse und ebenfalls die η-Achse senkrecht, oder genauer ausgedrückt: es giebt immer einen Punkt, wo diese Bahnen die Achsen senkrecht schneiden. Dies hindert aber nicht, dass die Curven auch — in anderen Punkten, die dann Doppelpunkte sind — die Achsen unter einem schiefen Winkel treffen können. Das Auftreten solcher *Schleifen* kann man, wie Poincaré (Méth. nouv. I. S. 108) gezeigt hat, mit Vortheil mittelst Entwickelungen nach Potenzen der Zeit studiren.

Wird die Achse der η-Coordinaten um die Zeit $t = 0$ von einer periodischen Bahn senkrecht geschnitten, kann man die Coordinaten in der Umgebung dieses Punktes durch Potenzreihen von der Form

$$(43)\qquad \begin{cases} \xi = v_0\, t + A_3\, t^3 + A_5\, t^5 + \dots \\ \eta = \eta_0 \quad + A_2\, t^2 + A_4\, t^4 + \dots \end{cases}$$

ausdrücken. Werden diese Reihen in die Differentialgleichungen (9) eingesetzt, so erhält man Recursionsformeln für die Coefficienten, aus denen folgende Werthe hervorgehen (HILL, S. 256)

$$(43^*)\qquad \begin{cases} 1.2\, A_2 = -\, 2 v_0 - \eta_0^{-2}, \\ 2.3\, A_3 = \quad 4 A_2 + 3 v_0 - \eta_0^{-3} v_0, \\ 3.4\, A_4 = -\, 6 A_3 + \frac{1}{2}\eta_0^{-4}(3 v_0^2 + 4 \eta_0 A_2), \\ 4.5\, A_5 = \quad 8 A_4 + 3 A_3 + \frac{3}{2}\eta_0^{-5}(v_0^2 + 2\eta_0 A_2)\, v_0 - \eta_0^{-3} A_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und man hat also

$$(44)\qquad \xi = v_0\, t - \left(\frac{1}{3\eta_0^2} + \frac{v_0}{6} + \frac{v_0}{6\eta_0^3}\right) t^3 + \dots$$

Wenn eine Schleife auf der η-Achse auftreten soll, so muss ξ für drei benachbarte Werthe von t verschwinden. Die erste Bedingung für das Auftreten einer Schleife ist also, dass v_0 *sehr klein ist*, so dass die obige Gleichung dann genähert lautet

$$(44^*)\qquad \xi = v_0\, t - \frac{1}{3\eta_0^2}\, t^3 + \dots$$

Ist v_0 *negativ*, so dass die η-Achse in direktem Sinn von der Bahn geschnitten wird, so kann ξ nur für *einen* Werth von t verschwinden, nämlich für $t = 0$. Wird aber die η-Achse in entgegengesetztem Sinn geschnitten, so ist v_0 positiv und die ξ-Coordinate kann für drei Werthe von t verschwinden, nämlich für

$$(45)\qquad \begin{cases} t = 0, \\ t = \pm\, \eta_0 \sqrt{3 v_0}\,. \end{cases}$$

Da wir hier nur die Voraussetzung gemacht haben, dass v_0 klein ist, so müssen solche Schleifen immer auftreten, so oft die Bahn des Satelliten mit kleiner Geschwindigkeit und im entgegengesetzten Sinne gegen die Bewegung von m_1 und m_2 um den Schwerpunkt die η-Achse senkrecht schneidet. Hieraus folgt aber nicht, dass alle solche Bahnen auch periodisch sind. Hierfür ist erforderlich, dass die Schleife in einem bestimmten Abstand von m_2 auftreten soll. Dieser Abstand ist gleich 0.7819 in canonischen Längeneinheiten. Hill hat nämlich durch mechanische Quadratur gefunden, dass ein Satellit, der mit der Geschwindigkeit 2.2410, im Abstande 0.2718, senkrecht zur Achse der ξ-Coordinaten ausgeschleudert wird, die η-Achse im Abstande 0.7819 mit der Geschwindigkeit Null erreicht.[1] Hill hat diesen Satelliten mit dem Namen „the moon of the lastlunation" bezeichnet, und Poincaré hat (l. c.) — in der oben angegebenen Weise — gezeigt, dass die analytische Fortsetzung dieses Mondes zu Schleifbahnen führt.

Solche Schleifen können auch auf der ξ-Achse vorkommen. Ist die Bahncurve zur ξ-Achse senkrecht, so kann man schreiben

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + B_2 t^2 + B_4 t^4 + \dots, \\ \eta &= v_0 t + B_3 t^3 + B_5 t^5 + \dots, \end{aligned}\right.$$

wo aus den Differentialgleichungen (9) erhalten wird:

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} 1.2\, B_2 &= 2 v_0 + 3\xi_0 - \xi_0^{-2}, \\ 2.3\, B_3 &= -4 B_2 - \xi_0^{-3} v_0, \\ 3.4\, B_4 &= 6 B_3 + 3 B_2 + \tfrac{1}{2}\xi_0^{-4}(3 v_0^2 + 4\xi_0 B_2), \\ 4.5\, B_5 &= -8 B_4 + \tfrac{3}{2}\xi_0^{-5} v_0 (v_0^2 + 2\xi_0 B_2) - \xi_0^{-3} B_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Hill giebt S. 255 die Werthe der B-Coefficienten bis zu B_9 an.

[1] Dieser Mond ist der letzte in Tabelle VII.

Man hat also

$$(46^*)\quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + \frac{1}{2}\left(2v_0 + 3\xi_0 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)t^2 + \ldots, \\ \eta = v_0 t - \left(\frac{2}{3}v_0 + \frac{v_0}{6\xi_0^3} + \xi_0 - \frac{1}{3\xi_0^2}\right)t^3. \end{cases}$$

Ist v_0 sehr klein, hat man also genähert

$$(46^{**})\quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + \frac{3}{2}\left(\xi_0 - \frac{1}{3\xi_0^2}\right)t^2 + \ldots, \\ \eta = v_0 t - \left(\xi_0 - \frac{1}{3\xi_0^2}\right)t^3 + \ldots \end{cases}$$

Die η-Coordinate kann für drei benachbarte Werthe, nämlich

$$(48)\quad \begin{cases} t = 0, \\ t = \pm\sqrt{\dfrac{v_0}{\xi_0 - \frac{1}{3\xi_0^2}}} \end{cases}$$

verschwinden, wenn die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv ist. Wir haben also hier zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $\xi_0 > \frac{1}{3\xi_0^2} \therefore \xi_0 > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$,

in welchem Falle v_0 positiv sein muss. Hier treten also Schleifen auf, so oft die ξ-Achse in *direktem* Sinne mit kleiner Geschwindigkeit von der Bahn senkrecht geschnitten wird. Der Abstand des Doppelpunktes ist hier grösser als ξ_0.

Fig. 13. Schleifen jenseits des Librationspunktes.

b) $\xi_0 < \frac{1}{3\xi_0^2}$.

Die Schleifen treten hier bei negativen Werthen von v_0 auf.

Der Grenzpunkt zwischen den beiden Fällen, dessen ξ-Coordinate gleich $1:\sqrt[3]{3}$ ist, fällt nach (13*) mit dem Librationspunkt L_1 zusammen.

Unendlich kleine Schleifen können also in jedem Punkt der ξ-Achse auftreten, wenn der Körper mit kleiner Geschwindigkeit

senkrecht zur ξ-Achse ausgeschleudert wird. Damit eine Schleife entsteht, muss die Richtung, in welcher der Körper die ξ-Achse passirt, ausserhalb L_1 eine directe, innerhalb L_1 eine entgegengesetzte sein.

Ob auch *periodische* Bahnen mit solchen Schleifen vorkommen, kann nicht ohne besondere Untersuchung festgestellt werden. Es ist aber wahrscheinlich, dass eine periodische Bahn existirt, die in L_1 eine Spitze hat, in welcher die Geschwindigkeit, indem sich der Körper dem Punkt L_1 nähert, gegen Null abnimmt.[1] Die analytische Fortsetzung dieser Bahn sind Curven, welche *um* den Punkt L_1 eine Schleife bilden. Dass periodische Bahnen dieser Art existiren, findet man aus den Rechnungen von DARWIN.

Die obige Untersuchung über die unendlich kleinen Schleifen ist unvollständig, insofern sie nicht direct auf Schleifen in dem Punkt L_1 oder in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes anwendbar ist. In dem betreffenden Punkte kann man nämlich nicht die mit v_0 multiplicirten Glieder in dem Coefficienten von t^3 in (46^*) vernachlässigen.

Für eine Bahn, die im Punkte L_1 die ξ-Achse senkrecht schneidet, gelten die Potenzreihen

$$\xi = \xi_0 + v_0 t^2 + \dots,$$

$$\eta = v_0 t - \left(\frac{2}{3} v_0 + \frac{v_0}{6 \xi_0^3}\right) t^3 + \dots,$$

oder, da

$$\frac{1}{\xi_0^3} = 3$$

ist,

$$\eta = v_0 \{t - \tfrac{7}{6} t^3 + \dots\}.$$

Die η-Coordinate verschwindet also für $t = 0$ und — unter der Voraussetzung, dass man berechtigt wäre, die mit t^5, t^7 u. s. w. multiplicirten Glieder zu vernachlässigen — auch für

$$t = \pm \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

[1] Eine derartige periodische Bahn ist jedenfalls $\xi = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $\eta \equiv 0$.

Dieser Werth von t ist aber nicht sehr klein, was die nothwendige Voraussetzung für den obigen Schluss ist, und folglich giebt es in L_1 keine unendlich kleine Schleifen. Richtiger ausgedrückt würde man sagen, dass es hier keine Schleifen, *deren Beschreibung eine unendlich kleine Zeit erfordert*, giebt. Es ist dagegen möglich, dass wirklich unendlich kleine Schleifen hier vorkommen können, die aber in *endlicher* Zeit beschrieben werden, und in der That weiss man, dass dies auch der Fall ist, da nämlich die periodischen Bahnen von der Familie a, die wir in § 4 untersucht haben, gerade diese Eigenschaft besitzen. Die Umlaufszeit in diesen Bahnen ist nämlich von endlicher Grösse, auch wenn die Dimensionen der Bahnen unendlich klein sind.

Man ist deswegen berechtigt anzunehmen, dass es periodische Bahnformen giebt, die eine Schleife um L_1 bilden. Die Zeit, welche der Satellit braucht, um diese Schleife zu beschreiben, ist nach § 4 (4*) genähert gleich

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt{28}-1}} = 0.483 \times 2\pi,$$

und die Wurzeln der Gleichung

$$\eta = 0$$

in der Nähe von L_1 müssen also

$$t = 0,$$

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\sqrt{28}-1}} = 1.52$$

sein.

Wenn die Reihenentwickelungen (46*) für so grosse t-Werthe convergiren, würde dies Resultat direct aus diesen Reihen festgestellt werden können.

Wenn die genauen Gleichungen (4) des asteroidischen Drei-Körperproblems in Betracht gezogen werden, erleiden die Schlüsse von Hill einige Veränderungen, die hauptsächlich damit zusammenhängen, dass die periodischen Bahnen in der Nähe von m_2 nicht mehr zur Achse der η-Coordinaten symmetrisch sind. Der Mond

„of the last lunation“ wird auch hier auftreten und ebenfalls die schleifenförmigen periodischen Bahnen, obgleich die Doppelpunkte sich nicht mehr auf der η-Achse befinden werden.

§ 6. Das CAUCHY'sche Existenztheorem. Erweiterung desselben von POINCARÉ.

Die allgemeinsten Untersuchungen über die periodischen Lösungen rühren von POINCARÉ her, welcher in „Les méthodes nouvelles“ neue und allgemeine Methoden für ihre Aufsuchung aufgestellt hat. Er geht hier von einem Fundamentalsatz über die Integrale der Differentialgleichungen aus, den wir zuerst ableiten wollen.

Ist eine Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t) \tag{1}$$

vorgelegt, und lässt sich die Function φ in der Umgebung von $t = t_0$, $x = x_0$ nach Potenzen von $t - t_0$ und $x - x_0$ entwickeln, und gehört dem Werth $t = t_0$ der Werth $x = x_0$, so lässt sich das Integral von (1) in der Form

$$x = x_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \dots \tag{2}$$

schreiben, welche Reihe für eine gewisse endliche Umgebung von $t = t_0$ convergirt. Die Coefficienten c_1, c_2 u. s. w. sind in eindeutiger Weise bestimmt, und die Reihe (2) ist die einzige analytische Integralfunction, welche für $t = t_0$ den Werth $x = x_0$ annimmt.

Dies ist das berühmte *CAUCHY'sche Existenztheorem.*

Diesem Theorem hat POINCARÉ eine wesentliche Erweiterung gegeben, durch welche er weitgehende Schlüsse in der Mechanik des Himmels hat ziehen können.

Das Theorem von POINCARÉ wollen wir in drei Sätze theilen.

Wir betrachten zuerst die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t), \tag{3}$$

und nehmen an, dass die Function φ nach Potenzen von x entwickelt werden kann, und dass diese Entwickelung für $|x| < a$ convergent ist und zwar für alle t solche, dass

$$(4) \qquad 0 \leqq t \leqq T.$$

Dagegen setzen wir nicht voraus, dass man die Function φ auch nach Potenzen von t innerhalb des Gebietes (4) entwickeln kann. Wir betrachten zwar φ als eine analytische Function von t im Gebiete (4), die in jedem Punkt α $(0 \leqq \alpha < T)$ nach Potenzen von $t - \alpha$ entwickelt werden kann; es ist aber nicht nothwendig, dass der Convergenzradius so gross ist, dass die Entwickelung nach Potenzen von t im *ganzen* Gebiete (4) convergirt.

Wir wollen dasjenige Integral von (3) betrachten, dass für $t = 0$ gleich Null ist.

Zu dem Zwecke führen wir eine Function x' ein, die durch die Differentialgleichung

$$(3^*) \qquad \frac{dx'}{dt} = \varphi'(x', t)$$

bestimmt ist, wo wir über die Function φ' in der rechten Seite von (3*) die Annahme machen, dass sie für $|x'| < a$ nach Potenzen von x' entwickelt werden kann, und zwar für alle t im Gebiete (4). Wird diese Entwickelung in der Form

$$(4^*) \qquad \varphi' = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x'^n, \quad \begin{pmatrix} |x'| < a, \\ 0 \leqq t \leqq T \end{pmatrix}$$

geschrieben, so nehmen wir noch an, dass sämmtliche Coefficienten B_n im Gebiete (4) *positiv* sind.

Hat die entsprechende Potenzreihe für φ die Form

$$(5) \qquad \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad \begin{pmatrix} |x| < a, \\ 0 \leqq t \leqq T \end{pmatrix}$$

so setzen wir endlich voraus, dass

$$|A_n| < B_n. \tag{6}$$

Wenn zwei Functionen φ und φ' der Ungleichheit (6) genügen, so wird dies von POINCARÉ durch das Symbol

$$\varphi \ll \varphi' \tag{6*}$$

ausgedrückt, oder vollständiger

$$\varphi \ll \varphi' \quad (\text{Arg. } x).$$

Sowohl A_n wie B_n sind im Allgemeinen Functionen von t und die Ungleichheiten (6) müssen für das ganze Gebiet (4) gelten.

Wenn nun, für $t = 0$, $x' = 0$ ist, *so können wir beweisen, dass*

$$|x| < x' \tag{7}$$

für das ganze Gebiet $0 \leqq t \leqq T$.

Man hat nämlich für $t = 0$

$$\varphi = \varphi(0,0) = A_0,$$

$$\varphi' = \varphi'(0,0) = B_0,$$

und da nach (6)

$$|A_0| < B_0,$$

so ist also

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| < \frac{dx'}{dt}, \tag{8}$$

welche Ungleichheit für kleine positive Werthe von t seine Gültigkeit behält. Man hat also für dieselben t-Werthe

$$|x| < x'. \tag{8*}$$

Die Ungleichheit (8*) muss erfüllt sein, so lange (8) besteht.

Wir nehmen an, dass (8*) von $t = 0$ bis $t = t_1 < T$ seine Gültigkeit behält, wir wollen dann beweisen, dass sie auch für t-Werthe etwas grösser als t_1 bestehen muss.

Für $t = t_1$ hat man

$$x = x_1, \quad x' = x_1',$$

wo der Annahme nach

$$|x_1| < x_1'.$$

Dann ist für $t = t_1$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x_1, t_1) = \sum A_n(t_1) x_1^n,$$

$$\frac{dx'}{dt} = \varphi'(x_1', t_1) = \sum B_n(t_1) x_1'^n,$$

und nach (6*) hat man also für $t = t_1$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| < \frac{dx'}{dt},$$

so dass (8*) auch für t-Werthe etwas grösser als $t = t_1$ bestehen muss und in dieser Weise können wir fortsetzen, bis man den Werth $t = T$ erreicht.

Nachdem dieser Hilfssatz bewiesen ist, wollen wir den zweiten Schritt machen, indem wir annehmen, dass in der zu behandelnden Differentialgleichung ein Parameter μ vorkommt. In Bezug auf die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \mu) \tag{9}$$

machen wir die Voraussetzung, dass $\varphi(x, t, \mu)$ für $|x| < a$, $|\mu| < p$ nach Potenzen von x und μ entwickelt werden kann und zwar für alle $0 \leqq t \leqq T$. Wir schreiben also

$$(9^*)\qquad \varphi = \sum_{\substack{i\\j}=0}^{\infty} A_{ij}\, x^i \mu^j = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \mu^m,$$

$$\begin{pmatrix} |x| < a, & |\mu| < p, \\ 0 \leqq t \leqq T & \end{pmatrix}.$$

Wir wollen ein Integral von (9) aufsuchen, das, für $t = 0$, gleich Null ist *und nach Potenzen von μ entwickelt ist.*

Wir setzen also

$$(10)\qquad x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

und bekommen

$$\begin{aligned} \varphi(x, t, \mu) = \varphi(x_0, t, 0) + \\ + \frac{\mu}{\underline{|1}} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\}_{\mu=0} + \\ + \frac{\mu^2}{\underline{|2}} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu\, \partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right\}_{\mu=0} + \\ + \dots, \end{aligned}$$

oder nach (10)

$$\begin{aligned} \varphi(x, t, \mu) = \varphi(x_0, t, 0) + \\ + \mu \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} \\ + \mu^2 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_2 + \frac{1}{\underline{|2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} x_1^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\underline{|2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0\, \partial \mu} x_1 + \frac{1}{\underline{|2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right\} \\ + \dots \\ + \mu^m \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_m + X_m \right\}, \end{aligned}$$

wo X_m nach den Potenzen von $x_1, x_2, \dots x_{m-1}$ entwickelt erscheint und ausserdem von x_0 und t abhängt.

Die Differentialgleichungen für x_0, x_1 u. s. w. sind also

$$\frac{dx_0}{dt} = \varphi(x_0, t, 0),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_2 + \frac{1}{\underline{|2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} x_1^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial \mu} x_1 + \frac{1}{\underline{|2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2},$$

. . . .

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_m + X_m.$$

Wir betrachten nun eine ähnliche Gleichung

$$\frac{dx'}{dt} = \varphi'(x', t, \mu), \tag{11}$$

wo

$$\varphi' = \sum_{\substack{i \\ j}\Big\}=0}^{\infty} B_{ij} x'^i \mu^j = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \mu^m, \tag{11*}$$

welche Entwickelung für $|x'| < a$, $|\mu| < p$ und für alle $0 \leqq t \leqq T$ convergent ist, und wo

$$|A_{ij}| < B_{ij} \tag{12}$$

ist.

Wird das Integral dieser Gleichung nach Potenzen von μ entwickelt und ist also

$$x' = x_0' + \mu x_1' + \mu^2 x_2' + \ldots,$$

so erhalten wir zur Bestimmung von x_0', x_1' u. s. w. die Gleichungen

$$\frac{dx_0'}{dt} = \varphi'(x_0', t, 0),$$

$$\frac{dx_1'}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_0'} x_1' + \frac{\partial \varphi'}{\partial \mu},$$

. . . .

$$\frac{dx_m'}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_0'} x_m' + X_m'.$$

Wir nehmen an, dass für $t = 0$,

$$0 = x_0 = x_1 = x_2 \ldots,$$

und

$$0 = x_0' = x_1' = x_2' \ldots$$

ist, und wollen beweisen, dass

$$|x_m| < x'_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

für $0 \leqq t \leqq T$.

Aus dem eben bewiesenen Hilfssatze folgt in der That, dass für diese Werthe von t

$$|x_0| < x_0'.$$

Bemerken wir, dass die Ungleichheit (12) in der Form

$$\left| \frac{\partial^{i+j} \varphi}{\partial x^i \partial \mu^j} \right| < \frac{\partial^{i+j} \varphi'}{\partial x'^i \partial \mu^j} \tag{12*}$$

geschrieben werden kann, so finden wir zuerst, weil, für $t = 0$, $x_1 = x_1' = 0$ ist, aus den Gleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu},$$

$$\frac{dx_1'}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_0'} x_1' + \frac{\partial \varphi'}{\partial \mu},$$

dass für kleine positive Werthe von t die Ungleichheit

$$|x_1| < x_1'$$

bestehen muss. Eine Wiederholung der früher geführten Beweisführung zeigt uns dann, dass diese Ungleichheit für alle t zwischen 0 und T erfüllt sein muss.

Wir nehmen an, dass man in dieser Weise dargethan hat, dass

$$|x_1| < x_1', \quad |x_2| < x_2', \ldots, \quad |x_{m-1}| < x'_{m-1}$$

ist, und wollen beweisen, dass dann auch

$$|x_m| < x'_m$$

ist.

Es war in der That X_m eine ganze rationale Function von x_1, $x_2, \ldots, x_{m-1}$, wo die Coefficienten die partiellen Ableitungen der Function φ nach x_0 und μ sind, und X_m' hatte eine ähnliche Zusammensetzung. Es ist also

$$|X_m| < X'_m.$$

Die Gleichungen

$$\frac{d x_m}{d t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_m + X_m,$$

$$\frac{d x'_m}{d t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_0'} x'_m + X'_m$$

zeigen also, weil, für $t = 0$, $x_m = x'_m = 0$ ist, dass für $t = 0$

$$\left| \frac{d x_m}{d t} \right| < \frac{d x'_m}{d t}$$

und also muss für kleine positive Werthe von t

$$|x_m| < x'_m$$

sein, und es lässt sich wieder dieselbe Beweisführung, wie in Bezug auf den ersten Hilfssatz, durchführen, so dass für alle t zwischen 0 und T die Ungleichheit (13) ihre Gültigkeit behalten muss.

In Bezug auf die Hilfsfunction $\varphi'(x, t, \mu)$ wurde angenommen:

1) dass sie, nach Potenzen von x' und μ entwickelt, für $|x'| < a$ und $|\mu| < p$ convergirt und zwar für alle t zwischen 0 und T;

2) dass die Coefficienten in dieser Entwickelung grösser als die entsprechenden Coefficienten in der Entwickelung von $\varphi(x, t, \mu)$ nach Potenzen von x und μ sind.

Es handelt sich darum, eine solche Hilfsfunction aufzusuchen.

Wenn die Entwickelung von $\varphi(x, t, \mu)$ nach Potenzen von x und μ auch für $|x| = a$ und $\mu = p$ seine Gültigkeit beibehält — was man hier immer annehmen kann, da man sonst den Convergenzradius etwas kleiner nehmen kann — so giebt es immer eine positive Zahl M von der Beschaffenheit, dass für

$$|x| \leqq a, \quad |\mu| \leqq p$$

man

$$|\varphi(x, t, \mu)| < M$$

hat.

Dann ist nach dem Fundamentalsatz von Cauchy

$$\frac{1}{\underline{|i}\,\underline{|j}} \left| \frac{\partial^{i+j}\varphi}{\partial x^i \partial \mu^j} \right| < \frac{M}{a^i p^j}$$

und also

$$\varphi(x, t, \mu) \ll M \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^i \left(\frac{\mu}{p}\right)^j,$$

oder

$$\varphi(x, t, \mu) \ll \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{\mu}{p}\right)}. \tag{14}$$

Die Function in der rechten Seite von (14) erfüllt also die Bedingungen, welche der Hilfsfunction φ' auferlegt sind. Poincaré zieht es aber vor, eine andere Hilfsfunction aufzustellen, da die obige Hilfsfunction zu einer ungünstigen Integralfunction führt.

Erstens bemerken wir, dass

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{\mu}{p}\right)} \ll \frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \alpha \mu)},$$

wenn nur α gleich der grösseren der beiden Zahlen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{p}$ gewählt wird.

Weiter ist offenbar

$$\frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \alpha \mu)} \ll \frac{1}{1 - \alpha(x + \mu)},$$

wie man durch eine Entwickelung nach Potenzen von x und μ direct findet.

Es ist aber

$$\frac{\alpha M(x+\mu)}{1-\alpha(x+\mu)} = \frac{M}{1-\alpha(x+\mu)} - M,$$

und endlich hat man

$$\frac{\alpha M(x+\mu)}{1-\alpha(x+\mu)} \leqslant \frac{\alpha M(x+\mu)\,(1+\alpha(x+\mu))}{1-\alpha(x+\mu)}.$$

Wählen wir also die Vergleichsfunction φ', so dass

$$\varphi' = \frac{M(x+\mu)\,(1+\alpha(x+\mu))}{1-\alpha(x+\mu)}, \tag{15}$$

so ist

$$\varphi(x,t,\mu) \leqslant \varphi' \qquad (\text{Arg. } x,\ \mu),$$

wenn wir nur *die Voraussetzung machen, dass* φ, *für* $\mu = x = 0$, *verschwindet.*

Unsere Aufgabe wird also zunächst die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M(x+\mu)(1+\alpha(x+\mu))}{1-\alpha(x+\mu)}. \tag{16}$$

zu integriren.

Gesetzt

$$s = \alpha(x+\mu), \tag{17}$$

hat man also

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Ms(1+s)}{1-s},$$

welche giebt

$$\log\frac{s}{(1+s)^2} = Mt + C,$$

wo C eine Integrationsconstante bezeichnet.

Der Voraussetzung nach soll das Integral die Bedingung erfüllen, dass, für $t=0$, $x=0$ ist. Es ist also

$$C = \log\frac{\alpha\mu}{(1+\alpha\mu)^2},$$

und somit

$$\frac{s}{(1+s)^2} = e^{Mt}\frac{\alpha\mu}{(1+\alpha\mu)^2}. \tag{18}$$

Das Integral s soll nach Potenzen von μ entwickelt werden. Setzen wir

$$(19) \qquad A = e^{Mt} \frac{\alpha\mu}{(1+\alpha\mu)^2},$$

so können wir (18) in der Form

$$s^2 + 2\left(1 - \frac{1}{2A}\right)s + 1 = 0$$

schreiben. Man hat also

$$(18^*) \qquad s = \frac{1 - 2A - \sqrt{1-4A}}{2A}.$$

Das Minus-Zeichen vor der Quadratwurzel wird gewählt, damit wir dasjenige Integral erhalten, das für $\mu = 0$ gleich Null wird. Dasjenige Integral, das dem Zeichen *Plus* vor der Quadratwurzel entspricht, wird aber dagegen, für $\mu = 0$, unendlich gross.

Die rechte Seite von (18*) lässt sich nach den positiven Potenzen von A entwickeln, und man erhält

$$s = A + 2A^2 + 5A^3 + \ldots,$$

welche Reihe für

$$|A| < \tfrac{1}{4}$$

convergent ist, d. h. — wenn μ eine positive Zahl bezeichnet — für

$$(19^*) \qquad \frac{4\alpha\mu}{(1+\alpha\mu)^2} < e^{-Mt}.$$

Andererseits kann A nach Potenzen von μ entwickelt werden, wenn nur

$$\mu < \frac{1}{\alpha}$$

ist, eine Ungleichheit, die der Voraussetzung nach immer erfüllt ist.

Wenn t einen endlichen, aber beliebig hohen Werth hat, so kann μ immer so klein gewählt werden, dass die Ungleichheit (19*) erfüllt ist. Es ist aber zu bemerken, dass, indem t ins

Unendliche wächst, der Convergenzradius für μ gegen Null abnimmt. Es ist also nicht erlaubt $t = \infty$ zu setzen.

Das Resultat, zu dem wir gelangt sind, ist also das folgende. Es sei eine Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \mu) \tag{20}$$

vorgelegt. Die Function φ habe die folgenden Eigenschaften:

1) sie verschwindet für $\mu = x = 0$, so dass

$$\varphi(0, t, 0) = 0$$

für alle Werthe von t;

2) sie lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln nach Potenzen von x und μ, welche convergirt, wenn x, dem absoluten Betrage nach, kleiner als a ist, und wenn der positive Parameter μ kleiner als p ist, und zwar gilt dies für alle t, welche dem Gebiete

$$0 \leqq t \leqq T$$

angehören.

Es lassen sich dann zwei positive Zahlen M und α finden der Art, dass, wenn

$$\varphi' = \frac{M(x+\mu)(1+\alpha(x+\mu))}{1-\alpha(x+\mu)}$$

ist, man

$$\varphi \ll \varphi' \quad (\text{Arg. } x, \mu)$$

hat.

Wir haben zweitens bewiesen, dass das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx'}{dt} = \varphi'(x', t, \mu)$$

sich nach Potenzen von μ entwickeln lässt in der Form

$$x' = x_0' + \mu x_1' + \mu^2 x_2' + \dots$$

und zwar convergirt diese Reihe für alle t, welche der Bedingung

$$0 \leqq t \leqq T$$

genügen, wenn μ hinreichend klein gewählt wird. Die obere Grenze T für t muss endlich sein, aber kann beliebig gross genommen werden.

Das Integral von (20) kann dann auch in der Form

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots \tag{21}$$

entwickelt werden, und da wir bewiesen haben, dass $x \ll x'$ ist, so ist die Reihe (21) auch convergent für alle t, welche dem Gebiete $0 \leqq t \leqq T$ angehören, wenn nur μ hinreichend klein gewählt wird.

Wenn im Besonderen die Entwickelung von $\varphi(x, t, \mu)$ nach Potenzen von x und μ *für alle reellen Werthe von t* convergiren würde, so convergirt die Reihe (21) für beliebig hohe Werthe von t, wenn nur μ hinreichend klein gewählt wird. Je kleiner μ gewählt wird, um so grösser ist im Allgemeinen das Gebiet für t, für welches (21) convergent ist. Wir dürfen aber im Allgemeinen nicht schliessen, dass die Reihe (21) auch für $t = \infty$ convergirt. Die Convergenz ist, nach der Terminologie von Weierstrass, eine *bedingte*, indem die Grösse des Convergenzradius (in μ) von t (oder richtiger von T) abhängig ist.

Es ist hier angenommen, dass es sich um dasjenige Integral handelt, das, für $t = 0$, gleich Null ist.

Wenn, für $t = 0$, x nicht gleich Null, sondern, sagen wir, gleich β ist, setzen wir

$$x = \xi + \beta$$

und haben

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi + \beta, t, \mu) = \psi(\xi, t, \mu, \beta). \tag{22}$$

Wenn die Function ψ sich nach Potenzen von ξ entwickeln lässt, so kann das eben bewiesene Theorem benutzt werden und x lässt sich also auch hier nach Potenzen von μ entwickeln. Die Bedingung ist, dass $x = \beta$ keine Unendlichkeitsstelle oder überhaupt keine singuläre Stelle der Function φ ist.

Die Bedingung, die oben gemacht worden ist, dass die Function $\varphi(x, t, \mu)$ für $\mu = x = 0$ verschwinden soll, ist auch keine nothwendige. Setzen wir nämlich in (20)

$$x = \xi + \theta(t),$$

so erhalten wir

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi + \theta, t, \mu) - \frac{d\theta}{dt},$$

und wenn die Funktion θ so bestimmt wird, dass

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi(\theta, t, 0), \tag{23}$$

so erhalten wir

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi + \theta, t, \mu) - \varphi(\theta, t, 0) \tag{24}$$

und die rechte Seite von (24) ist eine Function von ξ, t und μ, die für $\xi = \mu = 0$ verschwindet. Wählen wir noch den Anfangswerth von θ für $t = 0$ gleich dem Anfangswerth β von x für $t = 0$, so können wir das Integral von (24) und also auch von (20) nach den Potenzen von μ entwickeln. Hierfür ist indessen noch erforderlich, dass die rechte Seite von (24) sich nach Potenzen von ξ entwickeln lässt. Anders ausgedrückt heisst das, dass $x = \theta(t)$ durch keinen singulären Punkt der Function $\varphi(x, t, \mu)$ geht, wenn t alle reellen Werthe von Null bis T annimmt.

Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \mu),$$

wo $\varphi(x, t, \mu)$ nach positiven Potenzen von μ in eine convergente Reihe entwickelt werden kann für alle t im Gebiete $0 \leqq t \leqq T$, kann selbst in demselben Gebiete von t in eine Reihe nach positiven Potenzen von μ entwickelt werden

$$x = x_0(t) + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots,$$

wenn nur μ hinreichend klein gewählt wird, und ausserdem $\varphi(x, t, \mu)$ nach positiven Potenzen von $x - x_0(t)$ entwickelt werden kann für alle t zwischen Null und T.

Dies ist der Inhalt der von Poincaré gemachten Erweiterung des Cauchy'schen Existenztheorems.

Wenn, für $t = 0$, $x = \beta$ ist, so hatte man nach (22)

$$\frac{d\xi}{dt} = \psi(\xi, t, \mu, \beta).$$

Man kann hier β als einen Parameter betrachten und, wenn ψ nach Potenzen von β entwickelt werden kann, so lässt sich nach dem Obigen auch das Integral ξ — und also auch x — nach Potenzen von β entwickeln. Das Integral x kann also unter der gemachten Voraussetzung nach Potenzen sowohl von μ wie von der Integrationsconstante β entwickelt werden.

Wir haben im Obigen vorausgesetzt, dass nur eine einzige Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \mu)$$

vorliegt. Sind zwei gleichzeitige Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y, t, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi(x, y, t, \mu)$$

zu integriren, so lässt sich die Discussion in ähnlicher Weise ausführen und das Resultat fällt — *mutatis mutandis* — mit dem für eine Differentialgleichung geltenden überein. Das Aehnliche gilt für eine beliebige Zahl von gleichzeitigen Differentialgleichungen.

Im n-Körperproblem treten die Massen $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ der Planeten als Parameter auf. Die Integrale lassen sich hier nach Potenzen von $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ entwickeln für $0 \leqq t \leqq T$ — wenn nur diese Massen hinreichend klein angenommen werden —, so oft

die Kepler'schen Ellipsen, die man für $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = 0$ erhält, ***sich nicht gegenseitig schneiden***, in welchem Fall die Störungsfunction, für eine bestimmte Zeit, unendlich gross wird. Man findet diese Folgerung aus dem Satz von Poincaré im nächsten Abschnitte näher begründet.

Auf diesen Satz hat Poincaré seine Untersuchungen über die periodischen Lösungen im Drei-Körperproblem, welche wir im folgenden Paragraphen behandeln wollen, gegründet.

§ 7. Methode von Poincaré, die periodischen Lösungen aufzusuchen.

Wir nehmen an, dass die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

vorgelegt sind, und dass X_i bestimmte Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und der Zeit t sind und ausserdem einen Parameter μ enthalten.

Wir nehmen noch an, dass — wenn die Zeit wirklich in der rechten Seite von (1) vorkommt — X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ periodische Functionen von t sind mit der Periode T.

Die Integrale der Gleichungen (1) seien

$$x_i = \theta_i(t, \mu) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Wenn die Functionen $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \mu)$ sich nach den positiven Potenzen von μ und von $x_i - \theta_i(t, 0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ entwickeln lassen, so wissen wir aus dem vorigen Paragraphen, dass die Integrale $\theta_i(t, \mu)$ nach den positiven Potenzen von μ und von den Integrationsconstanten

$$\beta_i = \theta_i(0, \mu) - \theta_i(0, 0) \tag{3}$$

entwickelt werden können.

Wenn die Entwickelung von X_i nach Potenzen von μ und $x_i - \theta_i$ für alle reelle Werthe von t convergirt (es genügt, dass sie für $0 \leqq t \leqq T$ convergent ist), so convergirt die Entwickelung des Integrales für beliebig hohe Werthe von t, wenn μ hinreichend klein gewählt wird.

Wir können also, unter dieser Voraussetzung, schreiben

$$(4)\quad \begin{cases} x_i = \theta_i(t, \beta_1, \ldots, \beta_n, \mu) = \\ \quad = \theta_i(t, 0) + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1}\beta_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_2}\beta_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n}\beta_n + \frac{\partial x_i}{\partial \mu}\mu + \\ \quad + \text{höhere Potenzen von } \beta_1, \ldots, \beta_n \text{ und } \mu, \end{cases}$$

wo die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\beta_1, \ldots, \beta_n$ und μ gewisse Functionen von t sind.

Die Entwickelung (4) convergirt, wenn μ hinreichend klein genommen wird, für beliebig hohe Werthe von t. Wenn die Integrale (4) *periodische* Functionen von t sind, so müssen also diese Reihen für alle Werthe von t (also auch für $t = \infty$) convergent bleiben. Es genügt dazu Integrale aufzusuchen, die von $t = 0$ bis $t = T$ convergiren.

Es handelt sich darum, diejenigen Bedingungen aufzusuchen, unter denen die durch (1) definirte Bewegung periodisch ist.

Poincaré formulirt das Problem in folgender Weise.

Wir haben angenommen, dass die Function X_i von einem Parameter μ abhängig ist (im Problem der drei Körper ist μ als ein Repräsentant der „störenden" Massen anzusehen). Angenommen, dass man die Differentialgleichungen (1) für $\mu = 0$ integrirt hat, und dass man in diesem Falle gewisse periodische Lösungen gefunden hat, unter welchen Bedingungen hat man dann das Recht, hieraus zu schliessen, dass periodische Lösungen auch für kleine Werthe von μ existiren?

Der einfachste Fall, dem man begegnet, ist, dass die Coordinaten x_i für $t = T$ und $t = 0$ dieselben Werthe annehmen. Nach (1) werden dann die *Differentialquotienten* der Coordinaten zu diesen beiden Epochen auch dieselben Werthe annehmen und die Bewegung muss nothwendigerweise periodisch werden.

Dies ist aber keineswegs eine nothwendige Bedingung für die Entstehung periodischer Lösungen. Handelt es sich — wie hier angenommen wird — um die Bewegung von Massenpunkten, so entsteht eine periodische Bewegung jedesmal, wenn die *Configura-*

tionen der Massenpunkte und die augenblickliche Veränderung derselben für $t = 0$ und $t = T$ dieselben sind.

Wir wollen zuerst den ersteren Fall betrachten.

Das Integral der Gleichungen (1) hatten wir in der Form

$$x_i = \theta_i(t, \mu)$$

geschrieben, oder, wenn wir die Differenz der Anfangswerthe β_i

$$\beta_i = \theta_i(0, \mu) - \theta_i(0, 0)$$

mitnehmen wollen

$$x_i = \theta_i(t, \beta_1, \ldots, \beta_n, \mu).$$

Die Bewegung sei für $\mu = 0$ periodisch mit der Periode T, so dass

$$\theta_i(T, 0) = \theta_i(0, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wann entsteht eine Bewegung, die auch für $\mu \neq 0$ periodisch ist? Offenbar ist dies der Fall, wenn

$$\theta_i(T, \mu) = \theta_i(0, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ist, oder, nach (4), wenn

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = \psi_i = &\left\{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta_1}\right)_T - \left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta_1}\right)_0\right\} \beta_1 + \ldots + \left\{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta_n}\right)_T\right\} - \left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta_n}\right)_0\Big\} \beta_n + \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \mu}\right)_T - \left(\frac{\partial x_i}{\partial \mu}\right)_0\right\} \mu + \ldots \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \right.$$

ist.

Nach (1) können wir folgenden bequemeren Ausdruck für ψ_i finden:

$$(6) \qquad \psi_i = \int_0^T X_i \, dt$$

oder

$$(6^*)\quad \begin{cases} \psi_i = \beta_1 \int\limits_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \beta_1} dt + \beta_2 \int\limits_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \beta_2} dt + \ldots + \beta_n \int\limits_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \beta_n} dt + \\ \qquad + \mu \int\limits_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \mu} dt + \text{höhere Potenzen von } \beta_i \text{ und } \mu, \end{cases}$$

wo unter den Integralzeichen $\mu = 0 = \beta_1 = \ldots = \beta_n$ zu setzen ist.

Wir wollen diesen Ausdruck in der Form

$$(7)\quad \begin{cases} \psi_i = A_{i1}\beta_1 + A_{i2}\beta_2 + \ldots + A_{in}\beta_n + A_{i0}\mu + \\ \qquad + \text{höhere Potenzen von } \beta_i \text{ und } \mu \end{cases}$$

schreiben, so dass

$$(7^*)\quad A_{ij} = \int\limits_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \beta_j} dt,$$

und

$$(7^{**})\quad A_{i0} = \int\limits_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \mu} dt.$$

Wenn die Gleichungen (5) oder

$$(8)\quad \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0$$

sich nach $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ auflösen lassen, so erhält man $\beta_1, \ldots, \beta_n$ als Potenzreihen, die nach Potenzen von μ fortschreiten

$$(9)\quad \beta_i = p_i(\mu) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Anfangswerthe der Coordinaten waren

$$(9^*)\quad (x_i)_{t=0} = \theta_i(0, 0) + \beta_i$$

und durch (9) sind also diejenigen Anfangswerthe bestimmt, welche zu periodischen Lösungen der Differentialgleichungen (1) führen.

Nach § 3 im ersten Abschnitte sind die Lösungen (9) *einfache* Lösungen der Gleichungen (8), so oft die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

von Null verschieden ist.

Im Allgemeinen sind in der Mechanik die Gleichungen (8) nicht von einander unabhängig. Angenommen, dass ein Integral

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = C$$

der Gleichungen (1) existirt, das in t periodisch ist mit der Periode T, dann hat man

$$F(\theta_1(T, \mu), \ldots, \theta_n(T, \mu), T) = F(\theta_1(0, \mu), \ldots, \theta_n(0, \mu), 0)$$
$$= F(\theta_1(T, \mu), \ldots, \theta_n(T, \mu), 0),$$

oder, da

$$\theta_i(T, \mu) = \theta_i(0, \mu) + \psi_i$$

ist, so hat man

$$\left\{ \begin{aligned} 0 = \quad & F(\theta_1(0, \mu) + \psi_1, \ldots, \theta_n(0, \mu) + \psi_n, 0) \\ & - F(\theta_1(0, \mu), \ldots, \theta_n(0, \mu), 0). \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Die rechte Seite von (11) lässt sich nach Potenzen von $\psi_1, \ldots, \psi_n$ entwickeln *und verschwindet, wenn* $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0$. Wenn also $n - 1$ der Grössen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ gleich Null ist, so muss auch die übrige Grösse verschwinden. Im Besonderen muss für

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0$$

auch $\psi_n = 0$ sein, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$$

ist.

Existirt ein Integral F dieser Art, so können also die Gleichungen (8) nicht von einander unabhängig sein. Es genügt dann die $n-1$ Gleichungen

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0 \tag{12}$$

zu betrachten, und für die Entstehung einer einfachen Lösung ist erforderlich, dass die Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1,n-1} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1,1}, & A_{n-1,2}, & \ldots, & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \tag{12*}$$

von Null verschieden ist.

Eine der Grössen β_i kann in diesem Fall beliebig gewählt werden, oder man kann zu (12) die Gleichung

$$F = C$$

adjungiren, wo C beliebig gewählt werden kann.

Sind zwei ähnliche Integrale vorhanden, können im Allgemeinen zwei der Gleichungen (8) als Folgerungen aus den $n-2$ übrigen betrachtet werden u. s. w.

Den zweiten Fall, in welchem periodische Lösungen auftreten können, den wir kurz dadurch charakterisiren wollen, dass die Configuration der Massenpunkte für $t = 0$ und $t = T$ dieselbe ist, wollen wir mit Poincaré unter einer besonderen Voraussetzung behandeln.

Es seien die canonischen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{13}$$

gegeben, wo F eine Function von $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s$ und μ ist mit folgenden Eigenschaften:

1) F lässt sich für alle reellen Werthe von $y_1, y_2, \ldots, y_s$ nach positiven Potenzen von μ entwickeln

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots; \tag{13*}$$

2) F_0 hängt nur von $x_1, x_2, \ldots, x_s$ ab;

3) F ist periodisch in $y_1, y_2, \ldots, y_s$ mit der Periode 2π.

Die Differentialgleichungen (13) lassen sich dann für $\mu = 0$ leicht lösen. Man erhält in der That, für $\mu = 0$,

$$\frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i} = n_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{14}$$

welche geben

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= a_i, \\ y_i &= n_i t + \omega_i, \end{aligned}\right. \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{14*}$$

wo a_i und n_i *constante* Grössen bezeichnen.

Wenn nun

$$n_1 T, n_2 T, \ldots, n_s T$$

Vielfache von 2π sind, so ist die Bewegung periodisch mit der Periode T.

Wann existiren hier periodische Lösungen für $\mu \neq 0$ mit derselben Periode T?

Offenbar müssen wir im Allgemeinen zu diesem Zweck die Anfangswerthe a_i und ω_i für x_i und y_i etwas ändern. Es sei also für $t = 0$

$$x_i = a_i + \beta_i,$$
$$y_i = \omega_i + \gamma_i,$$

und wir führen statt x_i und y_i neue Veränderliche φ_i und ψ_i durch folgende Gleichungen ein

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= a_i + \beta_i + \varphi_i, \\ y_i &= n_i t + \omega_i + \gamma_i + \psi_i. \end{aligned}\right. \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{15}$$

Für φ_i und ψ_i erhalten wir die folgenden Differentialgleichungen

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial \omega_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_i} - n_i. \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

Wenn φ_i und ψ_i für $t = 0$ und $t = T$ dieselben Werthe (hier Null) annehmen, so ist die Bewegung offenbar periodisch mit der Periode T.

Betrachten wir zuerst die Gleichungen

$$(17)\qquad \psi_i(T) = \psi_i(0) = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

Da die Gleichungen (13) das Integral

$$F = C$$

besitzen, so sind die Gleichungen (17) nicht von einander unabhängig; wir nehmen an, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} \neq 0,$$

so dass die Gleichung $\psi_s(T) = 0$ eine Folge der anderen Gleichungen (17) ist. Wir haben also die $(s - 1)$ Gleichungen

$$(17^*)\qquad \psi_i(T) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s - 1)$$

zu betrachten, und können eine der Grössen β_i beliebig wählen. Wir setzen

$$(18)\qquad \beta_s = 0.$$

Nach (6*) erhalten wir nun $(i = 1, 2, \ldots, s - 1)$.

$$
(19)\left\{\begin{aligned}
0=\psi_i(T)= &-\beta_1\int_0^T\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i\partial a_1}dt-\beta_2\int_0^T\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i\partial a_2}dt-\dots-\beta_{s-1}\int_0^T\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i\partial a_{s-1}}dt\\
&+\mu\int_0^T\frac{\partial F_1}{\partial a_i}dt+\text{Glieder, die höhere Potenzen von }\beta_1,\dots,\beta_{s-1}\\
&\qquad\text{und }\mu\text{ enthalten.}
\end{aligned}\right.
$$

Da F_0 nur von $x_1, x_2, \dots, x_s$ und nicht von $y_1, y_2, \dots, y_s$ abhängt, so enthalten die mit $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ multiplicirten Glieder in (19), die hier nicht ausgeschrieben worden sind, auch den Factor μ.

Da

$$
\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i\,\partial a_j}
$$

eine Constante ist, so erhält die Gleichung (19), nachdem durch T dividirt worden ist, die Form

$$
(19^*)\left\{\begin{aligned}
0=&\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i\,\partial a_1}\beta_1+\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i\,\partial a_2}\beta_2+\dots+\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i\,\partial a_{s-1}}\beta_{s-1}+\\
&+\frac{\mu}{T}\int_0^T\frac{\partial F_1}{\partial a_i}dt+\dots\qquad(i=1,2,\dots,s-1).
\end{aligned}\right.
$$

Diese Gleichungen bestimmen die Werthe von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$. Die Lösung ist eine einfache, wenn die Determinante.

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1\,\partial a_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1\,\partial a_{s-1}}\\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\
\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_{s-1}\partial a_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_{s-1}\,\partial a_{s-1}}
\end{vmatrix}
$$

von Null verschieden ist. Diese Determinante ist aber nichts anderes als die Hesse'sche Determinante von F_0 in Bezug auf $x_1, x_2, \dots, x_{s-1}$.

Die Bedingung für die Entstehung einer einfachen Lösung der Gleichungen (17) ist also, dass *die Hesse'sche Determinante von F_0 in Bezug auf $s-1$ von den Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_s$ von Null verschieden ist.*

Wir gehen nun zur Betrachtung der Gleichungen

$$\varphi_i(T) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{20}$$

über.

Wir können hier die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ als bekannt voraussetzen und brauchen also in (20) nur die mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ und μ multiplicirten Glieder in Betracht zu ziehen.

Wenn wir die Formel (6*) zur Berechnung von $\varphi_i(T)$ anwenden, so erhalten wir

$$0 = \varphi_i(T) = \gamma_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \, \partial y_1} dt + \ldots + \gamma_s \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \, \partial y_s} dt$$
$$+ \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \, \partial \mu} dt + \ldots$$

Es wurde aber angenommen, dass F_0 von $y_1, y_2, \ldots, y_s$ unabhängig war; folglich muss man unter dem Integralzeichen für F die Grösse μF_1 einführen und die Glieder in $\varphi_i(T)$ haben also alle den Factor μ, was offenbar auch für die in dieser Formel vernachlässigten Glieder gilt. Wird durch den Faktor μ dividirt, erhalten wir somit

$$(21) \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\varphi_i(T)}{\mu} = \gamma_1 \displaystyle\int_0^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i \, \partial y_1} dt + \ldots + \gamma_s \int_0^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i \, \partial y_s} dt \\ \qquad + \displaystyle\int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial y_i} dt + \ldots \end{cases}$$

Damit die periodische Lösung, die wir hier betrachten, eine analytische Fortsetzung der für $\mu = 0$ erhaltenen Lösung sein soll, ist offenbar erforderlich, dass die Werthe für $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, die wir aus (21) erhalten, *mit μ verschwinden müssen.* Die Gleichung (21)

enthält aber ein Glied, das den Factor μ nicht besitzt, und folglich muss dies Glied verschwinden. Ist die Lösung periodisch, so müssen also die folgenden s Gleichungen stattfinden

$$0 = \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial y_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{22}$$

Die Gleichungen (22) zeigen, dass es für die Entstehung periodischer Lösungen erforderlich ist, dass gewisse Relationen zwischen den Grössen x_i und y_i für $\mu = 0$, d. h. zwischen a_i und ω_i, bestehen. In vielen Fällen genügt es, die Grössen ω_i in geeigneter Weise zu bestimmen.

Die Untersuchung der Gleichungen (22) wird von Poincaré in folgender Weise ausgeführt. Man setze

$$[F_1] = \frac{1}{T}\int_0^T F_1\, dt. \tag{23}$$

Die Grösse $[F_1]$ ist also das, was man in der Mathematik mit dem Namen „Mittelwerth der Function F_1" bezeichnet.

Die Gleichungen (22) lauten

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial y_i} = \frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{22*}$$

Diese Gleichungen (22*) sagen aus, dass die Function $[F_1]$, als Function von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ betrachtet, *ein Maximum oder ein Minimum sein muss.*

F_1 ist eine periodische Function von $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Man hat also nach dem Theorem von Fourier

$$F_1 = \sum A \cos(m_1 y_1 + \ldots + m_s y_s + h),$$

wo $m_1, \ldots, m_s$ alle positiven und negativen ganzen Zahlenwerthe annehmen.

Man hat hier

$$y_i = n_i t + \omega_i,$$

so dass

$$F_1 = \sum A \cos\omega,$$

wo

$$\omega = (m_1 n_1 + m_2 n_2 + \dots + m_s n_s) t + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_s \omega_s + h.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega_i} = -\sum A m_i \sin\omega$$

und

$$(24) \qquad [F_1] = \frac{1}{T}\int_0^T F_1\, dt = \mathfrak{S}\, A \cos\omega,$$

wo das Zeichen $\mathfrak{S}$ bedeutet, dass die Summation über alle solche Werthe von $m_1, \dots, m_s$ auszudehnen ist, für welche

$$(24^*) \qquad \sum m_i n_i = 0$$

ist.

Die Bedingung (22*) lautet

$$(25) \qquad 0 = \frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_i} = -\mathfrak{S}\, m_i A \sin\omega. \qquad (i = 1, 2, \dots, s)$$

Wir werden im zwölften Paragraphen die Folgerungen aus dieser Gleichung in Bezug auf das Drei-Körperproblem untersuchen.

§ 8. Fortsetzung. Methode von Poincaré, die periodischen Lösungen aufzusuchen.

Die Bedingungen für periodische Lösungen der Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i}. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots, s)$$

wo

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

ist, und F_0 nur von $x_1, x_2, \dots, x_s$ abhängt, war nach dem vorigen Paragraphen

$$H(F_0) \neq 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \tag{3}$$

wo $H(F_0)$ die HESSE'sche Determinante von F_0 in Bezug auf $s - 1$ der Grössen $x_1, x_2, \dots, x_s$ bezeichnet.

Soll die Lösung von (21) nach $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ eine einfache sein, so muss ausserdem die Gleichung

$$H([F_1]) \neq 0 \tag{4}$$

stattfinden, wo die HESSE'sche Determinante in Bezug auf $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ zu nehmen ist.

Es kommt öfters vor, dass die Bedingung (2) nicht erfüllt ist, indem nämlich F_0 nicht alle Grössen $x_1, x_2, \dots, x_s$ enthält. Obgleich die Behandlung dieses Falles leicht aus dem Obigen hervorgeht, wollen wir, nach POINCARÉ, diesen Fall besonders ins Auge fassen, da er im Drei-Körperproblem häufig vorkommt.

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass vier Freiheitsgrade vorhanden sind, und dass F_0 nur von x_1 und x_2 abhängig ist.

Wir erhalten dann

$$n_1 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1}, \quad n_2 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_2}$$

$$n_3 = n_4 = 0$$

und für $\mu = 0$

$$\begin{cases} x_1 = a_1, & x_2 = a_2, & x_3 = a_3, & x_4 = a_4, \\ y_1 = n_1 t + \omega_1, & y_2 = n_2 t + \omega_2, & y_3 = \omega_3, & y_4 = \omega_4. \end{cases} \tag{5}$$

Die Bedingungsgleichungen (6*) des vorigen Paragraphen lauten hier (nach Zeichenwechsel)

$$\psi_1(T) = 0 = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} dt + \beta_3 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} dt +$$

$$+ \beta_4 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_4} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \mu} dt + \ldots$$

$$\psi_2(T) = 0 = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} dt + \beta_3 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} dt +$$

$$+ \beta_4 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_4} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial \mu} dt + \ldots$$

$$\psi_3(T) = 0 = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} dt + \beta_3 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_3} dt +$$

$$+ \beta_4 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_4} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial \mu} dt + \ldots$$

$$\psi_4(T) = 0 = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial x_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial x_2} dt + \beta_3 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial x_3} dt +$$

$$+ \beta_4 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial x_4} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial \mu} dt + \ldots$$

Da F_0 nur x_1 und x_2 enthält, so findet man, dass die dritte und vierte dieser Gleichungen μ als Factor besitzt, indem man statt F_0 überall μF_1 einzuführen hat, und die Bedingungsgleichungen lauten

$$0 = \psi_1 = \psi_2 = \frac{\psi_3}{\mu} = \frac{\psi_4}{\mu}. \tag{6}$$

Die ersten zwei dieser Gleichungen haben die Form

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = A_{11}\beta_1 + A_{12}\beta_2 + \text{ Glieder, die mit } \mu \text{ verschwinden,} \\ 0 = A_{21}\beta_1 + A_{22}\beta_2 + \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu \quad \text{"} \quad , \end{array}\right. \tag{7}$$

wo

$$A_{ij} = \int_0^T \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \, \partial x_j} \, d t \tag{7*}$$

ist.

Nach (7) lassen sich β_1 und β_2 als Potenzreihen nach μ darstellen, welche mit μ verschwinden, unter der Voraussetzung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

Diese Determinante ist nichts anderes als die Hesse'sche Determinante von F_0 nach x_1 und x_2. Wir nehmen also an, dass

$$H(F_0) \neq 0 . \quad (\text{Arg. } x_1, \, x_2) \tag{8}$$

Die übrigen beiden Gleichungen

$$0 = \frac{\psi_3}{\mu} = \frac{\psi_4}{\mu}$$

enthalten theils Glieder, die mit β_i und μ multiplicirt sind, aber ausserdem ein Glied, das mit μ und β_i nicht verschwindet.

Die Anfangsbedingungen müssen somit in solcher Weise bestimmt werden, dass diese Glieder gleich Null sind. Wir erhalten also die Bedingungen

$$0 = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \, \partial \mu} \, d t = \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \, d t ,$$

$$0 = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \, \partial \mu} \, d t = \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \, d t ,$$

oder wenn man die Function $[F_1]$ einführt

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial [F_1]}{\partial x_3} &= 0 , \\ \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4} &= 0 . \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Was die Bedingungsgleichungen

$$\varphi_i(T) = 0$$

betrifft, so werden sie in gleicher Weise behandelt, wie im vorigen Paragraphen. Sie erfordern, dass

$$\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,\omega_i} = 0. \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{10}$$

Die Werthe von γ_1, γ_2, γ_3 und γ_4 bilden eine *einfache* Lösung, wenn die HESSE'sche Determinante von $[F_1]$ nach ω_1, ω_2, ω_3 und ω_4 von Null verschieden ist.

In demjenigen Falle, dass F_0 nur von x_1 und x_2 abhängt, müssen also die Anfangsbedingungen für x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 und y_4, d. h. die Werthe, welche diese Grössen für $t = 0$ und $\mu = 0$ annehmen, so bestimmt sein, dass $[F_1]$, als Function dieser Grössen betrachtet, ein Maximum oder Minimum wird.

§ 9. Die Form der Entwickelung der Störungsfunction.

Für die Untersuchung der periodischen Lösungen ist es nothwendig, einige Formen der Störungsfunction, die früher nicht gegeben worden sind, abzuleiten. Ich werde mich dabei auf die erste Potenz der störenden Massen beschränken — d. h. auf die Form der mit F_1 bezeichneten Function —, obgleich die meisten der folgenden Resultate leicht auf die strenge Form der Störungsfunction übertragbar sind, wenn man sich der JACOBI'schen canonischen Elemente bedient.

Die Störungsfunction ist von den drei Abständen r, r' und r'' abhängig, und man hat

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos\varphi, \tag{1}$$

wo φ den Winkel zwischen den beiden Radienvectoren r und r' bezeichnet.

Durch die excentrische Anomalie w ausgedrückt ist

$$r = a(1 - e\cos w)$$

und

$$r' = a'(1 - e'\cos w'),$$

wo w und w' mit den mittleren Anomalien l und l' durch die Formel

$$w - e\sin w = l, \tag{2}$$

$$w' - e'\sin w' = l' \tag{2*}$$

verbunden sind.

Diese Formeln zeigen, dass r und r' in FOURIER'sche Reihen nach den Vielfachen von l bez. l' entwickelt werden können:

$$\left\{\begin{aligned} r &= \tfrac{1}{2}B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos il, \\ r' &= \tfrac{1}{2}B_0' + \sum_{i=1}^{\infty} B_i' \cos il'. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Die Werthe der Coefficienten sind in IV § 9 angegeben.

Schreiben wir (2) in der Form

$$w - l - e\sin(w - l + l) = 0$$

oder

$$w - l = e\cos l\sin(w - l) + e\sin l\cos(w - l),$$

so ist nach dem Theorem von LAGRANGE ersichtlich, das $w - l$ als eine Reihe nach Potenzen von $e\cos l$ und $e\sin l$ dargestellt werden kann

$$w - l = P_1(e\cos l,\ e\sin l), \tag{4}$$

welche Reihe für $e = 0$ verschwindet.

Ebenfalls hat man

$$w' - l' = P_1'(e'\cos l',\ e'\sin l'). \tag{4*}$$

Für die wahre Länge v in der Bahn hat man folgenden bekannten Ausdruck in den osculirenden Elementen:

$$v = \pi + l + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sin i l, \tag{5}$$

wo α_i als Potenzreihe in e dargestellt werden kann. Diese Coefficienten sind von der Form

$$\alpha_i = a_0^{(i)} e^i + a_1^{(i)} e^{i+2} + a_2^{(i)} e^{i+4} + \dots$$

und hieraus folgt, wie in VI § 2 in einem ähnlichen Fall, dass $\alpha_i \sin i l$ nach Potenzen von $e \cos l$ und $e \sin l$ entwickelt werden kann. Man erhält also

$$(6) \quad \begin{cases} v = \pi + l + P_2 (e \cos l\,,\ e \sin l), \\ v' = \pi' + l' + P_2' (e' \cos l'\,,\ e' \sin l'). \end{cases}$$

In Bezug auf die Darstellung des Winkels φ in (1) wollen wir zuerst den Fall betrachten, dass *die Bewegung der drei Körper in einer Ebene stattfindet.*

Dann ist

$$\varphi = v - v',$$

und man findet aus (5), dass in diesem Fall φ von l, l' und $\pi - \pi'$ abhängig ist. Weiter ist offenbar r'', und auch die Störungsfunction, eine *periodische* Function dieser Veränderlichen. Man könnte dies schon aus V § 10 schliessen. Hier können wir einen Schritt weiter gehen, indem nämlich aus (3) und (5) unmittelbar folgt, dass r, r' und r'', und somit auch die Störungsfunction, unverändert bleibt, wenn man

$$\begin{array}{ccc} l & \text{mit} & -l \\ l' & ,, & -l' \\ \pi - \pi' & ,, & \pi' - \pi \end{array}$$

vertauscht. Die Entwickelung der Störungsfunction muss also die folgende Form haben

(7) $$F_1 = \sum A_{i,i',j} \cos\left(i\,l + i'\,l' + j(\pi - \pi')\right),$$

wo $A_{i,i',j}$ von a, a', e und e' abhängt, und i, i' und j alle positiven und negativen ganzen Zahlenwerthe annehmen.

F_1 ist also eine *gerade* Function von l, l' und $\pi - \pi'$.

Aus (3), (4) und (6) folgt weiter, dass F_1 als eine Function von a, a', $e\cos l$, $e\sin l$, $e'\cos l'$, $e'\sin l'$ und von $\lambda - \lambda'$ betrachtet werden kann, wo

$$\lambda = \pi + l = \text{mittlere Länge}$$

ist, und zwar lässt sich F_1 nach Potenzen der Grössen

$$e\cos l\,,\quad e\sin l$$
$$e'\cos l',\quad e'\sin l'$$

entwickeln, wobei die Coefficienten periodische Functionen von $\lambda - \lambda'$ sind.

Gehen wir zu dem allgemeinen Drei-Körperproblem über, so wissen wir aus V § 9, dass der aufsteigende Knoten der einen Planetenbahn auf der unveränderlichen Ebene mit dem absteigenden Knoten der anderen Bahn zusammenfällt. Der Abstand r'' zwischen den beiden Massen m und m' lässt sich also (von den Grössen zweiter Ordnung der Massen abgesehen) in der folgenden Form schreiben

(8*) $$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi,$$

wo

$$\cos\varphi = \cos(v - \Omega)\cos(v' - \Omega') + \\ + \sin(v - \Omega)\sin(v' - \Omega')\cos J$$

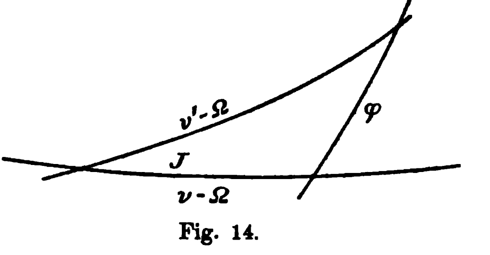


Fig. 14.

ist, oder, da $\Omega = \Omega'$ ist,

(8) $$\cos\varphi = \cos(v - v') - 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\sin(v - \Omega)\sin(v' - \Omega).$$

Es bedeutet hier J die *gegenseitige* Neigung der beiden Planetenebenen gegen einander, d. h. die Summe der Neigungen der Planetenbahnen gegen die unveränderliche Ebene.

Es ist aber nach (5)

$$v - \Omega = l + \pi - \Omega + \sum \alpha_i \sin i l,$$

oder, wenn man mit Delaunay

$$g = \pi - \Omega$$

setzt

$$(9) \qquad \begin{cases} v - \Omega = l + g + \sum \alpha_i \sin i l \\ v' - \Omega = l' + g' + \sum \alpha_i' \sin i l' \end{cases}$$

und

$$(9^*) \qquad v - v' = l - l' + g - g' + \sum \alpha_i \sin i l - \sum \alpha_i' \sin i l'.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (8) und (8*) ein, so findet man, dass r'' und ebenfalls F_1 periodische Functionen von

$$l, \quad l', \quad g, \quad \text{und} \quad g'$$

sind, die nach Potenzen von e, e' und $\sin^2 \frac{1}{2} J$ $(J = i + i')$ entwickelt werden können, mit Coefficienten, die von a und a' abhängen.

Diese Entwickelungen werden nicht geändert, wenn man gleichzeitig die Zeichen von l, l', g und g' wechselt. F_1 ist also eine *gerade* Function dieser Grössen, und wir können schreiben

$$(10) \qquad F_1 = \sum A \cos (i l + i' l' + j g + j' g').$$

§ 10. Periodische Lösungen der ersten Gattung.

Poincaré geht bei seinen Untersuchungen über periodische Lösungen von den Differentialgleichungen für die *osculirenden Elemente* aus, und er wird hierdurch zur Aufstellung der folgenden

drei Gattungen periodischer Lösungen des Problems der drei Körper geführt:

Für *die erste Gattung* sind die Neigungen Null und die Excentricitäten verschwinden mit den kleinen Massen ($\mu = 0$).

Für *die zweite Gattung* sind die Neigungen ebenfalls Null; die Excentricitäten behalten aber für $\mu = 0$ eine endliche Grösse.

Die dritte Gattung umfasst die Fälle, wo die Neigungen endlich sind.

Die erste Gattung würde man geneigt sein als einen Specialfall der zweiten Gattung zu betrachten. Sie unterscheiden sich aber in einem wesentlichen Punkt. Betrachtet man nämlich (für $\mu = 0$) zwei Planeten, die sich mit gleichförmiger Bewegung in *kreisförmigen* Bahnen um die Hauptmasse bewegen, so ist die Bewegung dieser drei Massen *immer* als eine periodische zu betrachten, indem nämlich die Periode gleich der synodischen Umlaufszeit der beiden Planeten ist.

Anders stellt sich die Sache, wenn es (für $\mu = 0$) sich um zwei Planeten handelt, welche sich in elliptischen Bahnen um die Centralmasse bewegen. Die Bewegung kann auch hier periodisch sein, aber nur *unter der Bedingung, dass die mittleren Bewegungen der beiden Planeten commensurabel sind.* Man steht hier offenbar vor einem Problem ganz anderer Art, als im vorigen Falle.

Werden die mittleren Bewegungen der beiden Planeten (für $\mu = 0$) mit n und n' bezeichnet ($n > n'$), so ist die synodische Umlaufszeit T gleich

$$\frac{2\pi}{n - n'}.$$

Die Bewegung ist also, für $\mu = 0$, periodisch mit dieser Periode, wenn die Bahnen kreisförmig sind. Giebt es dann auch für $\mu > 0$ periodische Bahnen mit derselben Periode?

Es gelingt Poincaré eine Antwort auf diese Frage zu finden, fast ohne die Differentialgleichungen der Bewegung in Betracht zu ziehen. Wenn nämlich das von den gegenseitigen Abständen r, r', r'' der drei Körper gebildete Dreieck für $t = 0$ und für $t = T$ dieselben Dimensionen hat, und wenn ausserdem die Ableitungen

von r, r' und r'' in diesen beiden Epochen die gleichen sind, so muss offenbar die Bewegung periodisch ausfallen.

Wir haben aber im vorigen Paragraphen gefunden, dass die Abstände r, r' und r'', wenn die Bewegung in einer Ebene stattfindet, nur von den folgenden Grössen abhängen:

$$(1) \quad \begin{cases} a, \quad e\cos l, \quad e\sin l, \\ a', \quad e'\cos l', \quad e'\sin l' \end{cases}$$

und $\lambda - \lambda'$, und dass sie in $\lambda - \lambda'$ periodisch sind, mit der Periode 2π, sowie dass sie nach Potenzen von $e\cos l$, $e\sin l$, $e'\cos l'$ und $e'\sin l'$ entwickelt werden können.

Weiter haben, weil die Elemente a, e, u. s. w. osculirend sind, die Ableitungen von r und r' dieselben Ausdrücke in der ungestörten und in der „gestörten" Bewegung. Es ist also

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na^2 e}{r} \sin w,$$

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{n'a'^2 e'}{r'} \sin w',$$

so dass $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{dr'}{dt}$ nur von den sechs Grössen (1) abhängen. Da

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v - v')$$

und

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}{r^2}$$

ist, so ist $\frac{dr''}{dt}$ auch durch dieselben Grössen und $\lambda - \lambda'$ bestimmt.

Damit die Bewegung periodisch ausfällt, ist also erforderlich, dass die Grössen (1) für $t = 0$ und für $t = 2T$ dieselben Werthe annehmen, und dass $\lambda - \lambda'$ um 2π wächst.

Die mittleren Bewegungen n und n' sind durch die Formeln

$$n = \frac{\gamma}{\Lambda^3}, \quad n' = \frac{\gamma'}{\Lambda'^3},$$

bestimmt, wo $A = \sqrt{a}$, $A' = \sqrt{a'}$ und γ und γ' zwei von den Massen abhängige Constanten sind.

Für $t = \mu = 0$ nehmen wir an, dass

$$e = e' = l = l' = \lambda = \lambda' = 0$$

und $A = A_0$, $A' = A'_0$ ist.

Um eine periodische Bewegung für $\mu \neq 0$ zu erhalten, nehmen wir an, dass e, e', l und l' die Werthe

$$e_0, \quad e_0', \quad l_0, \quad l_0'$$

annehmen; dagegen kann man den Anfang der Zeit und die Lage der X-Achse so wählen, dass auch für $\mu \neq 0$

$$\lambda = \lambda' = 0.$$

Die Anfangswerthe von A und A' seien $A_0 + \beta_1$ und $A_0' + \beta_2$.

Für $t = T$ nehmen die Grössen (1), wo a gegen A vertauscht wird, die Werthe

$$\begin{array}{lll} A_0 + \beta_1 + \psi_1, & e_0 \cos l_0 + \psi_3, & e_0 \sin l_0 + \psi_4, \\ A_0' + \beta_2 + \psi_2, & e_0' \cos l_0' + \psi_5, & e_0' \sin l_0' + \psi_6 \end{array}$$

und $\lambda - \lambda'$ den Werth

$$2\pi + \psi_0$$

an. Die Bedingungen für eine periodische Bewegung sind also

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0. \tag{2}$$

Es giebt aber zwei Integrale der Bewegung. Das Integral der lebendigen Kraft und das Integral der Flächen, welche lauten

$$\left\{ \begin{array}{r} F = C, \\ \beta A \sqrt{1 - e^2} + \beta' A' \sqrt{1 - e'^2} = c, \end{array} \right. \tag{3}$$

wie im fünften Abschnitt bewiesen wurde.

Was das Integral der lebendigen Kraft betrifft, so kann es nach Potenzen von μ entwickelt werden

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

und es ist

$$F_0 = \frac{\gamma}{2\Lambda^2} + \frac{\gamma'}{2\Lambda'^2},$$

so dass

$$n = -\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}, \qquad n' = -\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda'}.$$

Wie im Paragraphen (7) findet man, dass ψ_1 und ψ_2 verschwinden müssen, wenn ψ_0, ψ_3, ψ_4 u. s. w. gleich Null sind.

Wir müssen also die Gleichungen

$$\psi_0 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0 \tag{4}$$

auflösen und POINCARÉ fügt hierzu die Gleichung

$$F = C, \tag{4*}$$

wo C als gegeben betrachtet wird. Die Anfangswerthe

$$\beta_1, \beta_2, e_0, e_0', l_0, l_0'$$

müssen so bestimmt werden, dass (4) und (4*) befriedigt sind.

Um die Existenz einer *einfachen* Lösung dieser Gleichung darzuthun, genügt es zu beweisen, dass die Functionaldeterminante der linken Seiten dieser Gleichungen für $0=\mu=\beta_1=\beta_2=e_0=e_0'=l_0=l_0'$ von Null verschieden ist.

Bei der Ableitung dieser Determinante ist es nicht nothwendig, die von μ abhängigen Glieder hinzuschreiben. Es genügt diejenigen Glieder in (4) und (4*) zu betrachten, die nicht mit μ verschwinden. Mit anderen Worten können wir die Sache so ausdrücken, dass es für die Untersuchung dieser Determinante hinreichend ist, eine *ungestörte* Bewegung zu betrachten, welche von den Elementen

$$\Lambda_0 + \beta_1, \quad e_0, \quad l_0$$

$$\Lambda_0' + \beta_2, \quad e_0', \quad l_0'$$

bestimmt ist.

Für F_0 würde man dann den Ausdruck

$$F_0 = \frac{\gamma}{2(\Lambda_0 + \beta_1)^2} + \frac{\gamma'}{2(\Lambda_0' + \beta_2)^2}$$

erhalten, und für die neuen mittleren Bewegungen N und N' würde man die Werthe

$$N = \frac{\gamma}{(\Lambda_0 + \beta_1)^3} = n\left(1 + \frac{\beta_1}{\Lambda_0}\right)^{-3},$$

$$N' = \frac{\gamma'}{(\Lambda_0' + \beta_2)^3} = n'\left(1 + \frac{\beta_2}{\Lambda_0'}\right)^{-3},$$

bekommen.

Die Winkelgrössen l und λ würden von $t = 0$ bis $t = T = \frac{2\pi}{n - n'}$ um

$$U = NT = \frac{2\pi n}{n - n'}\left(1 + \frac{\beta_1}{\Lambda_0}\right)^{-3}$$

wachsen, und l' und λ' gleichzeitig um die Grösse

$$U' = N'T = \frac{2\pi n'}{n - n'}\left(1 + \frac{\beta_2}{\Lambda_0'}\right)^{-3}.$$

Die Glieder in ψ_0, ψ_3, ψ_4 u. s. w., die nicht μ als Factor haben, sind also

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{n - n'}\left\{n\left(1 + \frac{\beta_1}{\Lambda_0}\right)^{-3} - n'\left(1 + \frac{\beta_2}{\Lambda_0'}\right)^{-3}\right\} - 2\pi,$$

$$\psi_3 = e_0 \cos(l_0 + U) - e_0 \cos l_0, \quad \psi_4 = e_0 \sin(l_0 + U) - e_0 \sin l_0,$$

$$\psi_5 = e_0' \cos(l_0' + U') - e_0' \cos l_0', \quad \psi_6 = e_0' \sin(l_0' + U') - e_0' \sin l_0'.$$

Es hat jetzt keine Schwierigkeit, die Functionaldeterminante Δ dieser Gleichungen aufzustellen. Es ist in der That

14*

$$\varDelta = \varDelta_1 \varDelta_2 \varDelta_3 ,$$

wo

$\varDelta_1 =$ Determinante von F_0 und ψ_0 in Bezug auf β_1 und β_2;
$\varDelta_2 =$ Determinante von ψ_3 und ψ_4 in Bezug auf e_0 und l_0;
$\varDelta_3 =$ Determinante von ψ_5 und ψ_6 in Bezug auf e_0' und l_0'.

Es ergeben sich aber für diese Determinanten die folgenden Werthe:

$$\varDelta_1 = -\frac{6\pi n n'}{n - n'}\left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_0'}\right),$$

$$\varDelta_2 = e_0\{(\cos(l_0 + U) - \cos l_0)^2 + (\sin(l_0 + U) - \sin l_0)^2\},$$

$$\varDelta_3 = e_0'\{(\cos(l_0' + U') - \cos l_0')^2 + (\sin(l_0' + U') - \sin l_0')^2\},$$

$\varDelta_1$ verschwindet für $A_0 = - A_0'$, d. h. für $n = - n'$, ein Fall, der von keiner besonderen Bedeutung ist.

$\varDelta_2$ und $\varDelta_3$ verschwinden, wenn U und U' Vielfache von 2π sind, d. h. in Betracht der Werthe dieser Grössen, wenn n ein Vielfaches von $n - n'$ ist. Wir können diese Bedingung auch so ausdrücken, dass

$$\frac{n}{n'} = \frac{i+1}{i}, \tag{5}$$

wo i eine ganze Zahl bezeichnet.

Nur wenn die Gleichung (5) befriedigt ist, existiren keine periodischen Lösungen der ersten Gattung.

Es giebt offenbar eine vierfach unendliche Zahl Lösungen der ersten Gattung, indem nämlich die Periode T, die Constante C, die Zeit der Conjunction und die Länge der Conjunction beliebig gewählt werden können.

Wir haben im fünften Paragraphen dieses Abschnittes nach Hill gezeigt, wie die Reihen, die einer solchen Lösung entsprechen, in einem bestimmten Falle thatsächlich aufgestellt werden können.

Der Ausnahmefall (5), in welchem keine periodischen Lösungen der ersten Gattung vorkommen, hat ein besonderes astronomisches Interesse. Vom Standpunkte der Störungstheorie erklärt sich die Sache in folgender Weise.

Für die DELAUNAY'schen Elementen V § 5 lauteten die Differentialgleichungen

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L},$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}, \qquad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}.$$

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l'}, \qquad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L'}.$$

$$\frac{dG'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g'}, \qquad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G'},$$

und hier bedeuten l und g bez. die mittlere Anomalie und die Perihellänge, und man hat

$$L = \beta\sqrt{a}, \qquad L' = \beta'\sqrt{a'},$$

$$G = L\sqrt{1-e^2}, \quad G' = L'\sqrt{1-e'^2}.$$

Die Störungsfunction wird gewöhnlich durch die elliptischen Elemente L (oder a), e, L', e' ausgedrückt, und es ist offenbar

$$\frac{\partial F}{\partial G} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{Le}\frac{\partial F}{\partial e},$$

so dass die Bewegung des Perihels der beiden Planetenbahnen durch die Formeln

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{Le}\frac{\partial F}{\partial e}, \\ \frac{dg'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'}\frac{\partial F}{\partial e'} \end{aligned}\right.$$

bestimmt ist.

Wir wollen die secularen Bewegungen $[g]$ und $[g']$ der Perihelien für sehr kleine Werthe von e und e' untersuchen.

Wenn die mittleren Bewegungen n und n' nicht commensurabel sind, so hat man

$$\frac{d[g]}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{Le}\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$\frac{d[g']}{dt} = \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'}\frac{\partial R}{\partial e'},$$

wo R den gewöhnlichen secularen Theil der Störungsfunction bezeichnet. Es ist also für $e = e' = 0$

$$\frac{d[g]}{dt} = A + B\frac{e'}{e},$$

$$\frac{d[g']}{dt} = A' + B'\frac{e}{e'}.$$

Die Perihelien haben mittlere Bewegungen, deren Grösse wesentlich von dem Betrag des Verhältnisses zwischen den beiden kleinen Excentricitäten abhängt.

Ähnlich verhält sich die Sache, wenn n und n' sich wie zwei ganze Zahlen i und j verhalten:

$$\frac{n}{n'} = \frac{i}{j},$$

wenn nur nicht die Differenz zwischen i und j gleich $+1$ oder -1 ist. Wäre aber dies der Fall, würden schon in den Gliedern ersten Grades seculare Glieder auftreten und man würde ein Resultat von der Form

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d[g]}{dt} = A + B\dfrac{e'}{e} + C\dfrac{1}{e}, \\[2ex] \dfrac{d[g']}{dt} = A' + B'\dfrac{e}{e'} + C'\dfrac{1}{e'} \end{cases}$$

erhalten.

Hier tritt die Ausnahmestellung des Falles $|i-j| = 1$ hervor. Für verschwindende e und e' würde nämlich hier die seculare Bewegung der Perihelien unendlich gross ausfallen.

Es wäre verfrüht, hieraus den Schluss zu ziehen, dass die Fälle, wo $|i-j| = 1$ ist, von keiner Bedeutung für die Astronomie seien.

Vielmehr kommen im Planetensystem viele Fälle vor, wo die mittleren Bewegungen dieser Gleichung wenigstens sehr nahe genügen, obgleich die Excentricitäten, für $\mu = 0$, verschwinden. Airy hat in seinem classischen populären Werke „On Gravitation" die hierbei entstehenden eigenthümlichen Bewegungszustände abgeleitet, und Tisserand (Bulletin Astron. T. III 1886) und Backlund (Bulletin de l'Acad. Imp. de St. Pétersbourg 1898) haben vom analytischen Gesichtspunkte diese Untersuchungen weiter geführt. Im System der Saturnstrabanten existiren, wie Tisserand und Backlund bewiesen haben, mehrere solche Fälle, wie bei Hyperion-Titan, deren mittlere Bewegungen sich nahe wie 3 : 4 verhalten; bei Enceladus-Dione ist die mittlere Bewegung des erstgenannten Trabranten nahe gleich der doppelten mittleren Bewegung von Dione.[1]

Wir stehen hier vor periodischen Lösungen des Drei-Körperproblems, die indessen in gewissem Sinne nicht den Lösungen der ersten Gattung angehören.

§ 11. Periodische Lösungen der zweiten Gattung.

Diese sind dadurch charakterisirt, dass die Excentricitäten für $\mu = 0$ endlich sind. Die Neigungen sind gleich Null. Nach der Betrachtungsweise von Poincaré geht man von den Verhältnissen für $\mu = 0$ aus und stellt sich zuerst die Frage, wann ein System von drei Körpern, von denen zwei sich in festen Kepler'schen Ellipsen um den dritten Körper bewegen, ein periodisches System bilden. Offenbar ist dies der Fall, so oft die mittleren Bewegungen, n und n', in den Kepler'schen Ellipsen commensurabel sind. Dann wird die Bewegung immer periodisch. Es sei also

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q},$$

wo p und q zwei ganze Zahlen bezeichnen, die relativ prim sind.

[1] Brendel hat in seiner „Theorie der kleinen Planeten" die Bedeutung dieses Falles für die kleinen Planeten untersucht. Ich komme im dritten Bande dieser Vorlesungen zu dieser Frage zurück.

Wird der grösste gemeinsame Divisor von n und n' mit N bezeichnet, so dass

$$n = pN, \quad n' = qN, \tag{1}$$

so ist die Periode T der Bewegung gleich

$$T = \frac{2\pi}{N}, \tag{1*}$$

und die Masse m, welche die mittlere Bewegung n besitzt, hat in dieser Zeit p Umläufe gemacht, die Masse m', mit der mittleren Bewegung n', hat q Umläufe in der Ellipse vollbracht.

Wann existiren periodische Bewegungen für $\mu \neq 0$ mit derselben Periode T?

Wir können nach V § 10 die Bewegung auf drei Freiheitsgrade reduciren. Die entsprechenden Differentialgleichungen lauten, wenn wir die Störungsfunction, die hier nur von den sechs Elementen L, L', l, l', K, k abhängt, mit F bezeichnen (als Function der gewöhnlichen Delaunay'schen Elemente wird die Störungsfunction mit F bezeichnet):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial \mathsf{F}}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial L}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial \mathsf{F}}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial L'}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial \mathsf{F}}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial K}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} L &= \beta\sqrt{a}, & l &= \text{mittlere Anomalie von } m, \\ L' &= \beta'\sqrt{a'}, & l' &= \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad m', \\ K &= \beta\sqrt{a(1-e^2)}, & k &= \pi - \pi'. \end{aligned}\right. \tag{2*}$$

Die Excentricität von m' ist aus der Störungsfunction F mittelst des Integrales der Flächen eliminirt, welche lautet

$$G + G' = \beta\sqrt{a(1-e^2)} + \beta'\sqrt{a(1-e^2)} = c$$

oder

$$L\sqrt{1-e^2} + L'\sqrt{1-e'^2} = c. \tag{3}$$

F erscheint also als eine Function von L, L', l, l', K und k. Nach Potenzen von μ entwickelt hat man

$$\mathsf{F} = \mathsf{F}_0 + \mu \mathsf{F}_1 + \mu^2 \mathsf{F}_2 + \dots,$$

wo

$$\mathsf{F}_0 = \frac{\gamma}{2L^2} + \frac{\gamma'}{2L'^2}$$

oder nach V § 5 (wenn die Attractionsconstante = 1 gesetzt wird, und die kleinen Massen m und m' in der grossen Masse M als Einheit ausgedrückt werden)

$$\mathsf{F}_0 = \frac{\beta^2 m}{2L^2} + \frac{\beta'^2 m'}{2L'^2} = \frac{m}{2a} + \frac{m'}{2a'} = F_0 . \tag{4}$$

Was F_1 betrifft, so hat man nach § 9 den Ausdruck

$$\mathsf{F}_1 = \sum \mathfrak{A} \cos(i\,l + i'\,l' + j\,k). \tag{5}$$

Für F_1 hat man einen ähnlichen Ausdruck

$$F_1 = \sum A \cos(i\,l + i'\,l' + j\,k), \tag{5*}$$

nur ist in (5*) A als eine Function von L, L', G und G' zu betrachten, wogegen in (5) $\mathfrak{A}$ nur von L, L' und K abhängt. Der Uebergang von (5*) in (5) geschieht, indem man in (5*)

$$G' = c - K, \qquad G = K \tag{6}$$

setzt.

Es ist also im Besonderen

$$\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial G} - \frac{\partial F}{\partial G'}, \tag{7}$$

welche Formel unten zur Anwendung kommt.

Wir gehen nun zur Aufsuchung der periodischen Lösungen von (2) mit der Periode T über.

Da F_0 nur von L und L' abhängt, so befinden wir uns in dem in § 8 behandelten Falle. Wir haben also, nach der gegebenen Theorie, zuerst zu untersuchen, ob die HESSE'sche Determinante $H(\mathsf{F}_0)$ von F_0 nach L und L' von Null verschieden ist. Man findet aber, dass

(8) $$H(\mathsf{F}_0) = \frac{9\gamma\gamma'}{L^4 L'^4}$$

ist, welcher Ausdruck für endliche Massen nicht verschwindet.

Für das Vorkommen periodischer Lösungen war noch erforderlich, dass die Gleichungen

(9) $$\frac{\partial [\mathsf{F}_1]}{\partial l} = \frac{\partial [\mathsf{F}_1]}{\partial l'} = \frac{\partial [\mathsf{F}_1]}{\partial k} = 0,$$

und ausserdem

(9*) $$\frac{\partial [\mathsf{F}_1]}{\partial K} = 0$$

befriedigt sind, wo nach der Differentiation für L, L', l, l', K und k ihre für $t = \mu = 0$ geltenden Werthe eingesetzt werden müssen. Wir bezeichnen diese Anfangswerthe mit

(10) $$L_0, \; L_0', \; l_0, \; l_0' \; K_0, \; k_0.$$

Nach (5) ist

(11) $$[\mathsf{F}_1] = \sum \mathfrak{A} \cos (i\, l_0 + i'\, l_0' + j\, k_0),$$

wo i und i' alle ganzen Zahlenwerthe annehmen, für welche

$$i n + i' n' = 0,$$

d. h. nach (1)

(12) $$i p + i' q = 0$$

ist.

Wir können also annehmen, dass

(12*) $$i = s q, \quad i' = - s p,$$

wo s eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, und man hat

$$[\mathsf{F}_1] = \sum \mathfrak{A} \cos \left(s (q\, l_0 - p\, l_0') + j\, k_0\right).$$

Hier hat man $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zu setzen.

Die Gleichungen (9) lauten:

$$\sum s\,q\,\mathfrak{A}\sin\left(s(q\,l_0 - p\,l_0') + j\,k_0\right) = 0,$$

$$\sum s\,p\,\mathfrak{A}\sin\left(s(q\,l_0 - p\,l_0') + j\,k_0\right) = 0,$$

$$\sum j\;\mathfrak{A}\sin\left(s(q\,l_0 - p\,l_0') + j\,k_0\right) = 0.$$

Da p und q *bestimmte* Zahlen bezeichnen, so ist aber die zweite dieser Gleichungen mit der ersten übereinstimmend. Die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\,[F]}{\partial\,l_0} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\,[F]}{\partial\,l_0'} = 0$$

sind also identisch, und hieraus folgt, dass man eine von den Grössen l_0 oder l_0' beliebig wählen kann. Setze dann

$$l_0' = 0, \tag{13}$$

was in der That durch eine geeignete Wahl der Epoche erreicht werden kann. Es wird also angenommen, dass zur Zeit $t = 0$ die Masse m' sich im Perihel befindet.

Die beiden Gleichungen, die noch zu erfüllen sind, haben die Form

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum s\,\mathfrak{A}\sin(s\,q\,l_0 + j\,k_0) = 0, \\ &\sum j\,\mathfrak{A}\sin(s\,q\,l_0 + j\,k_0) = 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn k_0 und l_0 eine Vielfache von 180^0 oder Null sind. Dies würde, geometrisch ausgedrückt, bedeuten, dass zur Zeit $t = 0$ (und $\mu = 0$) die beiden Körper entweder in Conjunction oder in Opposition stehen, und zwar an der Apsidenlinie, welche für beide Planeten die gleiche Richtung hat. Die Perihellängen können zusammenfallen oder sich um 180^0 unterscheiden.

Poincaré nennt dies, dass sich die beiden Massen in *symmetrischer* Conjunction oder Opposition befinden.

Dies ist indessen nicht die allgemeine Lösung der Gleichungen (14). SCHWARZSCHILD hat in A. N. 3506 darauf aufmerksam gemacht, dass es, um die Gleichungen (14) zu befriedigen, nicht nothwendig ist, dass l_0 eine Vielfache von 180° ist, sondern es genügt, wenn dies mit $q\,l_0$ der Fall ist.

Wir kommen hiermit zu den beiden Lösungen

$$\alpha)\quad k_0 = \pi - \pi' = 0\,, \qquad l_0 = r \cdot \frac{180^\circ}{q}\,,$$

$$\beta)\quad k_0 = \pi - \pi' = 180^\circ, \quad l_0 = r \cdot \frac{180^\circ}{q}\,.$$

Die Zahl r kann hier eine beliebige ganze Zahl bezeichnen, es genügt aber, dass man die Zahlenreihe

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2q - 1$$

in Betracht zieht. Es giebt also in jedem der Fälle α) und β) $2q$ Werthe von l_0, welche einer periodischen Lösung entsprechen. Diese $4q$ Fälle brauchen indessen nicht alle von einander wesentlich verschieden zu sein.

Ist z. B.

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{3}\,,$$

so ist $q = 3$, und man kann für l_0 irgend einen von den Werthen

$$0^\circ,\ \ 60^\circ,\ \ 120^\circ,\ \ 180^\circ,\ \ 240^\circ,\ 300^\circ$$

wählen.

Es erübrigt noch die Bedingungsgleichung (9*) zu betrachten:

$$\frac{\partial\,[F_1]}{\partial K} = 0\,. \tag{9*}$$

Nach (7) kann man statt dessen schreiben

$$\frac{\partial\,[F_1]}{\partial G} - \frac{\partial\,[F_1]}{\partial G'} = 0\,. \tag{15}$$

Die Störungsfunction F_1 ist eine Function von L, L', G, G' und von den vier Winkelargumenten l, l', g, g'.

Die Entwickelungen der Störungsfunction, welche in der Astronomie gewöhnlich vorkommen, geschehen im Allgemeinen nach den Potenzen der Excentricitäten, und die Störungsfunction erscheint als eine Function der gewöhnlichen Kepler'schen Elemente a, e u. s. w. Wird die Störungsfunction als von diesen Elementen abhängig betrachtet, werden wir sie zur Unterscheidung bei der Ausführung von partiellen Differentiationen mit R bezeichnen, so dass wir die folgenden drei Formen zu betrachten haben:

$$R(a, e, l, \pi, \quad a', e', l', \pi') =$$
$$= F(L, G, l, g, \quad L', G', l', g') =$$
$$= \mathsf{F}(L, L', K, \quad l, l' k).$$

Man hat

$$G = L\sqrt{1-e^2}, \qquad G' = L'\sqrt{1-e'^2},$$

und also

$$\frac{\partial F}{\partial G} = -\frac{G}{L^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{Le}\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$\frac{\partial F}{\partial G'} = -\frac{G'}{L'^2 e'}\frac{\partial R}{\partial e'} = -\frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'}\frac{\partial R}{\partial e'},$$

so dass die Gleichung (15) also lautet

(16) $$\frac{\sqrt{1-e^2}}{Le}\frac{\partial [R]}{\partial e} - \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'}\frac{\partial [R]}{\partial e'} = 0,$$

wo

$$[R] = \frac{1}{T}\int_0^T R\,dt$$

ist.

Wir können R in der Form

(17) $$R = \sum A \cos\left(il - i'l' + j(\pi - \pi')\right)$$

schreiben, wo

$$l = n\,t + c\,,$$

$$l' = n'\,t + c'$$

zu setzen ist, und $[R]$ enthält alle Glieder in R, für welche

$$in - i'n' = 0 \tag{18}$$

ist.

Diese Gleichung kann in zwei verschiedenen Weisen erfüllt werden:

1) für $i = i' = 0$; die entsprechenden Glieder werden der *seculare* Theil der Störungsfunction genannt, den wir mit S_1 bezeichnen wollen;

2) nach (1) für $ip - i'q = 0$, d. h. für

$$i = sq\,,\quad i' = sp\qquad (s = \pm 1\,,\ 2\,,\ 3\ \ldots). \tag{18*}$$

Den entsprechenden Theil von $[R]$ bezeichnen wir mit S_2.

Die Form von S_1 ist bekannt. Nach VII § 2 wissen wir, dass S_1 — wenn wir die Bewegung in drei Dimensionen in Betracht ziehen und die unveränderliche Ebene als Grundebene annehmen — eine *gerade* Function von e, e' und $\sin(i + i')$ ist, die nach den Cosinussen der Vielfachen von $\pi - \pi'$ fortschreitet.

Die Glieder des niedrigsten (des zweiten) Grades sind nach VII § 2 (6*), wo wir $\Omega - \Omega' = 180^{\circ}$, $k^2 = 1$ zu setzen haben,

$$\left\{\begin{aligned} S_1 = \frac{m\,m'}{8}\{B_1\,(e^2 + e'^2 - \sin^2(i + i')) - \\ - 2\,B_2\,e\,e'\cos(\pi - \pi')\}\,, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

wo

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{a\,a'\cos\varphi\,d\varphi}{[a^2 + a'^2 - 2\,a\,a'\cos\varphi]^{3/2}}\,,$$

$$B_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{a\,a'\cos 2\varphi\,d\varphi}{[a^2 + a'^2 - 2\,a\,a'\cos\varphi]^{3/2}}$$

ist, oder wenn man nach den Potenzen von $\alpha = \frac{a}{a'}$ entwickelt (nach VI § 5)

$$
(19^*) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{3}{a'}\alpha^2\left[1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\alpha^2 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{4\cdot 6}\alpha^4 + \ldots\right], \\ B_2 = \frac{15}{4a'}\alpha^3\left[1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{6}\alpha^2 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{7\cdot 9}{6\cdot 8}\alpha^4 + \ldots\right]. \end{cases}
$$

Was S_2 betrifft, so ist die Form dieser Function nach (17)

$$
(20) \qquad S_2 = \sum A_{i,i',j}\cos\left(i c - i' c' + j(\pi - \pi')\right),
$$

wo i und i' die Werthe (18*) annehmen. In Bezug auf die Coefficienten $A_{i,i',j}$ ist zu bemerken, dass sie als Potenzreihen nach den Potenzen von e, e' und $\sin(i + i')$ entwickelt sind, und dass — wie aus den Betrachtungen in V § 2 leicht hervorgeht — die Glieder der niedrigsten Ordnung in dieser Entwickelung vom Grade $|i - i'|$ sind.

Nach (18*) folgt hieraus, *dass die Glieder der niedrigsten Ordnung in* S_2 *vom Grade* $|p - q|$ *sind.*

Aus diesem Satze ist ersichtlich, dass man bei der Betrachtung der Gleichung (16) zwei Fälle zu unterscheiden hat. Ist erstens $|p - q|$ nicht eine kleine Zahl (etwa grösser als 4), so genügt es in (16) statt $[R]$ den secularen Theil S_1 der Störungsfunction einzuführen, so dass die zu betrachtende Gleichung lautet

$$
(21) \qquad \frac{\sqrt{1-e^2}}{L e}\frac{\partial S_1}{\partial e} - \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L' e'}\frac{\partial S_1}{\partial e'} = 0.
$$

Führt man nach (19) die niedrigsten Glieder in S_1 hier ein, und setzt $i = i' = 0$, da es sich um die Bewegung in einer Ebene handelt, so erhält man, nachdem der Factor $\frac{m m'}{4}$ weggeworfen worden ist,

$$
\frac{1}{L}\left(B_1 - B_2\frac{e'}{e}\cos(\pi - \pi')\right) - \frac{1}{L'}\left(B_1 - B_2\frac{e}{e'}\cos(\pi - \pi')\right) = 0.
$$

Es ist aber nach dem Vorigen $\pi - \pi'$ entweder gleich 0 oder gleich 180°. Ist

α) $\pi - \pi' = 0$, so lautet die obige Gleichung (vom Falle e oder $e' = 0$ abgesehen)

$$(22) \qquad L B_2 e^2 + B_1 e e' (L' - L) - L' B_2 e'^2 = 0,$$

und für

β) $\pi - \pi' = 180^0$ bekommt man

$$(22^*) \qquad L B_2 e^2 - B_1 e e' (L' - L) - L' B_2 e'^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich für gegebene Werthe von L und L' der Werth des *Verhältnisses* zwischen e und e' bestimmen, für welches eine periodische Lösung der zweiten Gattung existirt. Die Wurzeln dieser Gleichung sind immer reell.

Man kann auch die Werthe von e und e' als gegeben voraussetzen, und den entsprechenden Werth von $L' : L$ bestimmen. Wir erhalten somit im Falle

α)

$$(23) \qquad \frac{L'}{L} = \frac{B_2 e^2 - B_1 e e'}{B_2 e'^2 - B_1 e e'},$$

wo e und e' so gewählt sein müssen, dass die rechte Seite positiv ist; im Falle

β) ist

$$(23^*) \qquad \frac{L'}{L} = \frac{B_2 e^2 + B_1 e e'}{B_2 e'^2 + B_1 e e'}.$$

Für alle Werthpaare (e, e') — mit der in α) genannten Bedingung — kann man das Verhältnis zwischen L' und L so wählen, dass eine periodische Bewegung entsteht.

Die genäherten Werthe von L und L' sind nach VI § 4 (6)

$$L = m \sqrt{a}, \quad L' = m' \sqrt{a'}.$$

Da die mittleren Bewegungen n und n' commensurabel sind, so ist dadurch das Verhältnis zwischen a und a' bestimmt. Die Gleichungen (23) und (23*) können durch eine geeignete Wahl der Werthe der *Massen* erfüllt werden.

Die obigen Auseinandersetzungen sind nur als Annäherungen zu betrachten, da nur die Glieder zweiten Grades in S_1 berücksichtigt worden sind. Sie können also nur für kleine Werthe von e und e' Gültigkeit haben, und für grössere Werthe der Excentricitäten müssen höhere Potenzen von e und e' mit in Betracht gezogen werden. Es ist aber aus der Gleichung (16) ersichtlich, dass man aus derselben e als eine Potenzreihe von der Form

$$e = e'\{\alpha_0 + \alpha_1 e' + \alpha_2 e'^2 + \ldots\} \tag{24}$$

darstellen kann.

Ist $|p - q|$ eine kleine Zahl, so muss auch S_2 in (16) mitgenommen werden. Die Discussion der Gleichung für $|p - q| \geqq 2$ ist der obigen analog, obgleich die Resultate natürlich verschieden ausfallen. Ist aber $|p - q| = 1$, so giebt es, wie aus VI § 3 (19) leicht hervorgeht, in der Störungsfunction das Glied

$$\frac{1}{2}\frac{a\,a'}{[a^2 + a'^2 - 2\,a\,a'\cos(l - l' + \pi - \pi')]^{3/2}}\{e\cos(2l - l' + \pi - \pi') \\ + e'\cos(l - 2l' + \pi - \pi')\},$$

und, wenn man den ersten Factor nach Vielfachen von $l - l' + \pi - \pi'$ entwickelt, so erhält man hier ein Glied, das t nicht enthält. Ist zum Beispiel $2n - n' = 0$, so erhält man für dieses Glied den Werth

$$\tfrac{1}{4} B_0\, e\cos(2c - c' + \pi - \pi'),$$

oder, da $\cos(2c - c' + \pi - \pi')$ gleich $+1$ oder -1 ist,

$$\pm \tfrac{1}{4} B_0\, e.$$

Wird dies Glied in (16) eingesetzt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$0 = \pm\frac{1}{4}\frac{B_0}{L e} + K_1 + K_2\frac{e'}{e} + \ldots$$

Die Wurzel — e — dieser Gleichung verschwindet nicht mit e', wie bei (22*) der Fall war. Die Werthe der Excentricität, die

einer periodischen Lösung für $|p - q| = 1$ entsprechen, sind deswegen, im Allgemeinen, viel grösser als für $|p - q| > 1$, und es lässt sich nicht ohne eingehende Untersuchung entscheiden, ob überhaupt periodische Lösungen der zweiten Gattung für $|p - q| = 1$ existiren, da hierfür noch erforderlich ist, dass der resultirende Wurzelwerth für e kleiner als die Einheit ist. Es lässt sich indessen aus einem von Hill betrachteten Specialfalle, der weiter unten besprochen wird, vermuthen, dass dies der Fall ist.

Ist die Masse m des einen Planeten verschwindend, handelt es sich also um das asteroidische Drei-Körperproblem, so verschwindet das zweite Glied in (16), und man erhält die Bedingung unter der Form

$$\frac{1}{e}\frac{\partial S}{\partial e} = 0, \tag{25}$$

wo

$$S = \frac{1}{m}[R]$$

ist.

Da auch in diesem Falle $\pi - \pi'$ gleich 0^0 oder 180^0 sein muss, so ist hier — weil π' eine Constante ist — π unveränderlich. *Bei den periodischen Lösungen der zweiten Gattung des asteroidischen Drei-Körperproblems ist also das Perihel des kleinen Planeten unbeweglich.*

Ist $|p - q|$ nicht eine kleine Zahl, so dass man für (25) die Gleichung

$$\frac{\partial S_1}{\partial e} = 0 \tag{25*}$$

schreiben kann, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$0 = B_1 e - B_2 e' \cos(\pi - \pi') + \text{höhere Glieder in } e \text{ und } e'. \tag{25**}$$

Die vernachlässigten Glieder sind sämmtlich ungeraden Grades. Dieser Ausdruck zeigt, dass in diesem Falle nur der Werth

$$\pi - \pi' = 0,$$

nicht aber der Werth $\pi - \pi' = 180^0$ zu periodischen Lösungen führen kann. Ein genäherter Werth von e, für kleine e', ist

$$e = \frac{B_2}{B_1} e' . \tag{26}$$

In VII § 4 (8) wurde gezeigt, dass immer $(a < a')$ $B_1 > B_2$ ist. *Die Excentricität des kleinen Planeten ist also für eine periodische Lösung immer kleiner als diejenige des „störenden" Planeten.*

Die periodischen Lösungen des asteroidischen Drei-Körper-problems sind von Hill behandelt worden (Astron. Journal Nr. 516) für den Fall, dass Jupiter der „störende" Planet ist. Er nimmt $e' = 0.04825$ an, und zieht in S_1 Glieder bis zur sechsten Ordnung inclusive in Betracht. Ist erstens $|p - q|$ eine grosse Zahl, so erhält er die folgenden Werthe der Wurzeln der Gleichung (25*). In der folgenden Tabelle ist $\alpha = a : a'$.

Periodische Lösungen der zweiten Gattung für das asteroidische Drei-Körperproblem.

α	e	α	e	α	e
0.02	0.001 2091	0.26	0.015 5796	0.50	0.029 1772
0.04	0.002 4178	0.28	0.016 7534	0.52	0.030 2466
0.06	0.003 6258	0.30	0.017 9216	0.54	0.031 3029
0.08	0.004 8326	0.32	0.019 0838	0.56	0.032 3453
0.10	0.006 0379	0.34	0.020 2392	0.58	0.033 3726
0.12	0.007 2414	0.36	0.021 3875	0.60	0.034 3837
0.14	0.008 4426	0.38	0.022 5281	0.62	0.035 3776
0.16	0.009 6411	0.40	0.023 6605	0.64	0.036 3529
0.18	0.010 8366	0.42	0.024 7841	0.66	0.037 3080
0.20	0.0120 286	0.44	0.025 8982	0.68	0.038 2412
0.22	0.013 2167	0.46	0.027 0022	0.70	0.039 1503
0.24	0.014 4005	0.48	0.028 0955		

Da

$$n = \frac{1}{a^{3/2}}, \quad n' = \frac{\sqrt{1+m'}}{a'^{3/2}}, \quad \frac{n}{n'} = \frac{p}{q},$$

so erhält man α aus der Gleichung

$$\log\alpha = 9.9998618 - \frac{2}{3}\log\frac{p}{q}.$$

Wenn das Commensurabilitätsverhältniss $p:q$ gegeben ist, erhält man hieraus den Werth von α, und die Tabelle giebt den entsprechenden Werth der Excentricität des kleinen Planeten, der einer periodischen Lösung der zweiten Gattung entspricht.

Hill hat auch einige periodische Bahnen für niedrige Werthe von $|p-q|$ berechnet, nämlich für $p=3$, $q=1$ und für $p=2$, $q=1$. Die Untersuchung ist hier bedeutend umständlicher, und erfordert zum Theil die Anwendung der mechanischen Quadratur.

Für $p=3$, $q=1$ zeigt sich, dass periodische Bahnen dieser Gattung nur existiren können, wenn die Richtung der Perihelien des kleinen Planeten und des Jupiters mit einander übereinstimmen, so dass $\pi - \pi' = 0$ ist. Hill erhält hier

$$\frac{\partial S_1}{\partial e} = -0.0080600 + 0.287698e - 0.046723e^2 + 0.202990e^3,$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial e} = -0.1082128 + 1.250172e - 0.630954e^2 + 1.765393e^3,$$

so dass

$$0 = \frac{\partial S}{\partial e} = -0.1162728 + 1.537870e - 0.677677e^2 + 1.968383e^3.$$

Die Wurzel dieser Gleichung ist

$$e = 0.077565.$$

Veranschaulicht wird die entsprechende periodische Bahn durch die beigefügte Figur 15, welche die *synodische* Bahn eines Planeten darstellt, dessen mittlere Bewegung die dreifache des Jupiter ist. Die hier

gezeichnete Bahn wird synodisch genannt, weil sie auf ein bewegliches Coordinatensystem bezogen ist, dessen X-Achse durch die Sonne und Jupiter geht. Die Buchstaben J und J' zeigen die

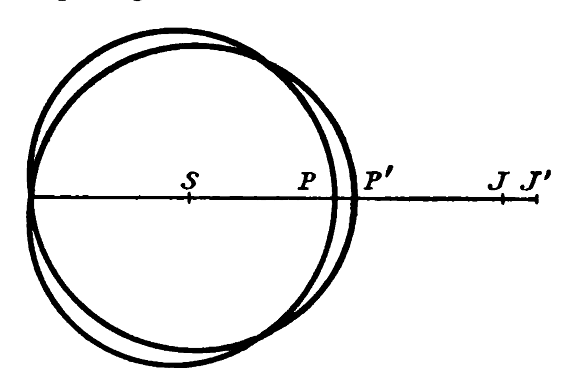


Fig. 15. Synodische Bahn eines kleinen Planeten, dessen mittlere Bewegung die dreifache des Jupiter ist ($\mu = 0$).

Stellung des Jupiters im Perihel und im Aphel. Zu beiden Fällen ist er in Conjunction mit dem Planeten, der sich in P bez. P' befindet.

Hill hat auch die Lösung für $p = 2$, $q = 1$ untersucht. Die Untersuchung ergiebt sich als sehr schwierig und muss hauptsächlich mit Hilfe mechanischer Quadratur ausgeführt werden. Wenn $\pi - \pi' = 0$, so erhält er als Werth für die Excentricität $e = 0.7073$, und die synodische Bahn des Planeten wird durch Fig. 16 gezeigt. Die Excentricität ist hier so gross, dass der Planet viermal in einem synodischen Umlauf die Jupiterbahn schneidet. Die Figur zeigt aber, dass der kleine Planet sich in grosser Entfernung vom Jupiter bewegt, und Hill schliesst hieraus, dass die periodischen Stö-

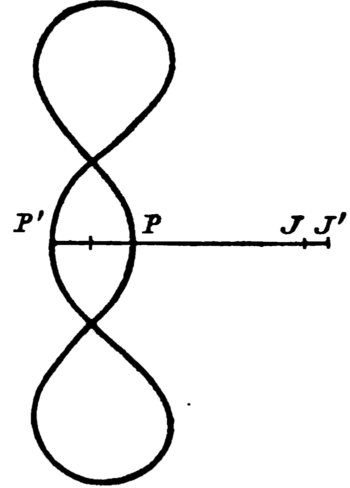


Fig. 16. Synodische Bahn eines kleinen Planeten, dessen mittlere Bewegung die zweifache des Jupiter ist ($\mu = 0$).

rungen klein sein müssen „und schätzt, dass kein Coefficient in der Länge den Werth von 200″ überschreitet“.

Fassen wir die Resultate dieses Paragraphen zusammen, so haben wir also gefunden, dass periodische Lösungen der zweiten Gattung des Problems der drei Körper unter den folgenden Bedingungen existiren. Es muss für $\mu = 0$:

1) Die mittlere Bewegung n und n' der beiden Planeten commensurabel sein, so dass

$$\text{(a)} \qquad \frac{n}{n'} = \frac{p}{q}$$

ist, wo p und q zwei ganze Zahlen bezeichnen, die relativ prim zu einander sind.

2) Die Perihellängen π und π' der beiden Planetenbahnen müssen entweder identisch sein, oder sich um 180^0 von einander unterscheiden:

$$\text{(b)} \qquad \pi - \pi' = 0^0 \text{ oder } 180^0.$$

3) Wird der Anfang der Zeit so gewählt, dass $c' = 0$, so muss c einen solchen Werth haben, dass

$$\text{(c)} \qquad c = r \cdot \frac{180^0}{q},$$

wo r einen der Zahlenwerthe $0, 1, 2, \ldots, 2q-1$ hat.

4) Die Excentricitäten e und e' müssen so gewählt sein, dass die Gleichung

$$\text{(d)} \qquad \frac{\sqrt{1-e^2}}{Le}\,\frac{\partial S}{\partial e} - \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'}\,\frac{\partial S}{\partial e'} = 0$$

erfüllt ist, wo S diejenigen Glieder in der Störungsfunction (17) enthält, für welche

$$ip - i'q = 0$$

ist.

Damit die so erhaltene Lösung eine *einfache* Lösung ist, ist erforderlich, dass die Hesse'sche Determinante von $[F_1]$ nach c, k und K von Null verschieden ist.

§ 12. Periodische Lösungen der dritten Gattung.

Wie im vorigen Paragraphen findet man, dass auch hier periodische Bewegungen für $\mu = 0$ auftreten, wenn die mittleren Bewegungen n und n' commensurabel sind.

Wir bringen nach V § 10 die Differentialgleichungen auf vier Freiheitsgrade, so dass

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial l}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial L}, \\[2ex] \dfrac{d\Gamma}{dt} = \dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial g}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial \Gamma}, \\[2ex] \dfrac{dL'}{dt} = \dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial l'}, & \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial L'}, \\[2ex] \dfrac{d\Gamma'}{dt} = \dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial g'}, & \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial \mathsf{F}}{\partial \Gamma'} \end{cases}$$

ist, wo L, L', l und l' dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen haben und

$$(1^*)\qquad g = \pi - \Omega, \quad g' = \pi' - \Omega',$$

$$(2^*)\qquad \Gamma = G = L\sqrt{1-e^2}, \quad \Gamma' = G' = L'\sqrt{1-e'^2}.$$

ist.

Es wird hier vorausgesetzt, dass man in der Störungsfunction F die Elemente h, h', H und H' eliminirt hat, indem man die Bewegung auf die unveränderliche Ebene bezieht, wodurch h und h' verschwinden, und indem man setzt

$$(2)\quad \begin{cases} H = \dfrac{c}{2} + \dfrac{1}{2c}(\Gamma^2 - \Gamma'^2), \\[2ex] H' = \dfrac{c}{2} - \dfrac{1}{2c}(\Gamma^2 - \Gamma'^2), \end{cases}$$

wo c die Constante der Flächenintegrale bezeichnet.

F_0 hat dasselbe Aussehen wie im vorigen Paragraphen und ist also nur von L und L' abhängig, und die Hesse'sche Determinante von F_0 in Bezug auf L und L' ist von Null verschieden.

Wie im vorigen Paragraphen findet man die Bedingungen für das Auftreten periodischer Lösungen, welche hier sind:

$$(3) \qquad \frac{\partial [F_1]}{\partial c} = \frac{\partial [F_1]}{\partial c'} = \frac{\partial [F_1]}{\partial g} = \frac{\partial [F_1]}{\partial g'} = 0,$$

und

$$(3^*) \qquad \frac{\partial [F_1]}{\partial \Gamma} = \frac{\partial [F_1]}{\partial \Gamma'} = 0,$$

wo man $l = nt + c$, $l' = n't + c'$ zu setzen hat.

Die Störungsfunction F_1 hat hier das Aussehen [§ 9 (10)]

$$F_1 = \sum \mathfrak{A} \cos(il - i'l' + jg - j'g'),$$

und weiter ist

$$[F_1] = \mathsf{S}\, \mathfrak{A} \cos(ic - i'c' + jg - j'g'),$$

wo i und i' alle diejenigen ganzen Zahlenwerthe annehmen, für welche

$$in - i'n' = 0$$

ist, oder wenn wir, wie im vorigen Falle,

$$(4) \qquad \frac{n}{n'} = \frac{p}{q}$$

setzen, so muss

$$ip - i'q = 0$$

sein, oder

$$(4^*) \qquad i = sq, \quad i' = sp \quad (s = 0, 1, 2, \ldots);$$

für $s = 0$ erhalten wir die secularen Glieder in $[F_1]$.

Aus (4*) folgt, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial c} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{\partial [F_1]}{\partial c'} = 0$$

gleichzeitig bestehen, so dass wir statt (3) die drei Gleichungen

$$\frac{\partial [\mathsf{F}_1]}{\partial c} = \frac{\partial [\mathsf{F}_1]}{\partial g} = \frac{\partial [\mathsf{F}_1]}{\partial g'} = 0$$

zu untersuchen haben, und c' beliebig gewählt werden kann. Wir setzen $c' = 0$, was durch eine geeignete Wahl für die Epoche erreicht werden kann. Die obigen Gleichungen lauten

$$0 = \sum s q \mathfrak{A} \sin(s q c + j g - j' g'),$$
$$0 = \sum j \ \mathfrak{A} \sin(s q c + j g - j' g'),$$
$$0 = \sum j' \ \mathfrak{A} \sin(s q c + j g - j' g'),$$

und sind befriedigt, wenn wir setzen

$$(4^{**}) \quad \begin{cases} g = 0^\circ \text{ oder } 180^\circ, \\ g' = 0^\circ \text{ oder } 180^\circ, \\ c = r\dfrac{180^\circ}{q} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, 2q-1), \end{cases}$$

wo indessen die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dass auch andere Lösungen dieser Gleichungen vorhanden sein können. Ich bemerke, dass man, statt $c' = 0$ zu wählen, auch $c = 0$ setzen könnte und statt der dritten Gleichung (4**) dann die Gleichung

$$c' = r \cdot \frac{180^\circ}{p} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, 2p - 1)$$

erhalten würde.

Es erübrigt die Gleichungen (3*) zu betrachten. Es empfiehlt sich die Störungsfunction durch die gewöhnlichen Kepler'schen Elemente auszudrücken, da ihre Form in diesen Elementen wohlbekannt ist. Setzen wir also (indem von den Winkelelementen, die keine Veränderungen erleiden, abgesehen wird)

$$(5) \quad R(L, L', e, e', i, i') = F(L, L', G, G', H, H') = \mathsf{F}(L, L', \Gamma, \Gamma'),$$

so hat man nach V § 10

$$\frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\partial F}{\partial H'}$$

und also ist

$$\frac{\partial F}{\partial G} = \frac{\partial \mathsf{F}}{\partial \Gamma}, \quad \frac{\partial F}{\partial G'} = \frac{\partial \mathsf{F}}{\partial \Gamma'},$$

so dass die zu betrachtenden Gleichungen die folgenden sind

$$\frac{\partial [F]}{\partial G} = \frac{\partial [F]}{\partial G'} = 0.$$

Zwischen G, H und e, i bestehen die Relationen

$$G = L\sqrt{1-e^2}, \quad H = G\cos i,$$

oder

$$(6) \quad \begin{cases} e = \dfrac{\sqrt{L^2 - G^2}}{L}, & \sin i = \dfrac{\sqrt{G^2 - H^2}}{G}, \\ e' = \dfrac{\sqrt{L'^2 - G'^2}}{L'}, & \sin i' = \dfrac{\sqrt{G'^2 - H'^2}}{G'}. \end{cases}$$

Werden die Ausdrücke (6) für e, e', i, i' in R eingesetzt, so geht diese Function in F über. Es ist also

$$\frac{\partial F}{\partial G} = \frac{\partial R}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial G} + \frac{\partial R}{\partial \sin i}\frac{\partial \sin i}{\partial G},$$

$$\frac{\partial F}{\partial G'} = \frac{\partial R}{\partial e'}\frac{\partial e'}{\partial G'} + \frac{\partial R}{\partial \sin i'}\frac{\partial \sin i'}{\partial G'}.$$

Da

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial G} = -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{Le}, \\ \dfrac{\partial \sin i}{\partial G} = \dfrac{\cos^2 i}{L\sqrt{1-e^2}\sin i} \end{cases}$$

ist, so lauten also die Bedingungsgleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} 0 = -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{Le}\dfrac{\partial [R]}{\partial e} + \dfrac{\cos^2 i}{L\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial [R]}{\partial \sin i}, \\ 0 = -\dfrac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'}\dfrac{\partial [R]}{\partial e'} + \dfrac{\cos^2 i'}{L'\sqrt{1-e'^2}\sin i'}\dfrac{\partial [R]}{\partial \sin i'}. \end{cases}$$

Im neunten Paragraphen wurde bewiesen, dass, wenn die unveränderliche Ebene als XY-Ebene benutzt wird, die Neigungen i und i' immer in der Kombination $i+i'$ auftreten, und zwar indem R nach Potenzen von $\sin^2 \frac{1}{2}(i+i') = \sin^2 \frac{1}{2} J$ entwickelt werden kann. Es ist also

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\partial R}{\partial i'} = \frac{\partial R}{\partial J}, \tag{9}$$

oder

$$\cos i \frac{\partial R}{\partial \sin i} = \cos i' \frac{\partial R}{\partial \sin i'} = \frac{\partial R}{\partial J},$$

so dass die Gleichungen (8) auch in der Form

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= -\frac{1-e^2}{e} \frac{\partial [R]}{\partial e} + \operatorname{cotg} i \frac{\partial [R]}{\partial J}, \\ 0 &= -\frac{1-e'^2}{e'} \frac{\partial [R]}{\partial e'} + \operatorname{cotg} i' \frac{\partial [R]}{\partial J} \end{aligned} \right. \tag{10}$$

geschrieben werden können.

Wird $\frac{\partial [R]}{\partial J}$ zwischen diesen Gleichungen eliminirt, so erhält man

$$\operatorname{tg} i \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial [R]}{\partial e} - \operatorname{tg} i' \frac{1-e'^2}{e'} \frac{\partial [R]}{\partial e'} = 0, \tag{10*}$$

welche Gleichung eine der Gleichungen (10) ersetzen kann.

Die Neigungen i und i' in Bezug auf die unveränderliche Ebene sind nach V § 9 (14*) durch die Relation

$$G \sin i = G' \sin i' \tag{11}$$

verbunden. Man findet hieraus, dass (10*) für $i = i' = 0$ in die Gleichung (16) des vorigen Paragraphen übergeht.

Wir können in der That (10*) in der Form

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{Le} \frac{\partial [R]}{\partial e} - \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'} \frac{\partial [R]}{\partial e'} + \Phi = 0$$

schreiben, *wo* Φ *für* $i = i' = 0$ *verschwindet*

Für die Discussion der Formel (10) ist es nothwendig, die Form von $[R]$, für welche wir hier die Bezeichnung S anwenden wollen, näher in Betracht zu ziehen. Erstens bemerken wir, dass S als eine Function von J erscheint, die nach den *geraden* Potenzen dieser Grösse entwickelt werden kann. Da weiter nach (11)

$$i' = \frac{G}{G'} i + \text{ Glieder höherer Ordnung in } i,$$

so ist

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{J}{i} = 1 + \dfrac{G}{G'} + \text{ Glieder, die mit } J \text{ verschwinden,} \\ \dfrac{J}{i'} = 1 + \dfrac{G'}{G} + \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad J \quad \text{"} \end{cases}$$

Sehen wir vorläufig vom Werthe $e = e' = 0$ ab, so können wir statt (10) schreiben

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial e} = \dfrac{e}{1-e^2} \operatorname{cotg} i \, \dfrac{\partial S}{\partial J}, \\ \dfrac{\partial S}{\partial e'} = \dfrac{e'}{1-e'^2} \operatorname{cotg} i' \, \dfrac{\partial S}{\partial J}. \end{cases}$$

S besteht aus zwei Theilen, S_1 und S_2, von denen S_1 gleich dem gewöhnlichen secularen Theil der Störungsfunction ist, wogegen S_2 diejenigen Glieder in der Störungsfunction umfasst, welche in Folge der Commensurabilität der mittleren Bewegungen secular werden. Der niedrigste Grad der Glieder in S_2 ist gleich $|p - q|$. In Bezug auf die Function S_1 ist zu bemerken, dass sie unverändert bleibt, wenn e und e' gegen $-e$ und $-e'$ vertauscht werden.

Ist $|p - q| > 2$, so ist S_2 wenigstens vom Grade *drei*, und die Entwickelung von S hat die Form (wo $\pi - \pi' = 0$ angenommen worden ist)

$$S = \tfrac{1}{8} B_1 [e^2 + e'^2 - J^2] - \tfrac{1}{4} B_2 e e' + \sum B_{s,s',r} e^s e'^{s'} J^r,$$

wo $s + s' + r > 2$ ist, und r immer eine gerade Zahl ist.

Die Glieder niedrigsten Grades in der rechten Seite von (13) sind, mit Rücksicht auf (12),

$$-\tfrac{1}{4} B_1 \left(1 + \frac{L}{L'}\right) e$$

und

$$-\tfrac{1}{4} B_1 \left(1 + \frac{L'}{L}\right) e'.$$

und werden diese in die linke Seite von (13) überführt und mit den Gliedern ersten Grades in $\frac{\partial S}{\partial e}$ und $\frac{\partial S}{\partial e'}$ vereinigt, so entstehen Gleichungen von der Form

$$(14) \qquad \begin{cases} \tfrac{1}{4} B_1 \left(2 + \frac{L}{L'}\right) e - \tfrac{1}{4} B_2 e' = P_1, \\ -\tfrac{1}{4} B_2 e + \tfrac{1}{4} B_1 \left(2 + \frac{L'}{L}\right) e' = P_2, \end{cases}$$

wo P_1 und P_2 Potenzreihen in e, e' und J bezeichnen, die keine Glieder von niedrigerem Grade als dem zweiten enthalten.

Wir haben hier zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $|p - q|$ eine *gerade* Zahl, so ist S_2, wie S_1 immer ist, eine gerade Function in e und e'. *Alle* Glieder in $\frac{\partial S}{\partial e}$ und $\frac{\partial S}{\partial e'}$ müssen dann e oder e' als Factor enthalten, *so dass die Potenzreihen* P_1 *und* P_2 *für* $e = e' = 0$ *verschwinden.*

Ist dagegen $|p - q|$ eine ungerade Zahl, etwa gleich $2k + 1$, so kann S ein Glied von der Form

$$B_k e J^{2k}$$

enthalten, und folglich wird in P_1 das Glied

$$-B_k J^{2k}$$

vorkommen. Die genäherten Werthe von e und e' werden dann durch die Formeln

$$B_1\left(2+\frac{L}{L'}\right)e - B_2 e' = -4B_k J^{2k}$$

$$-B_2 e + B_1\left(2+\frac{L'}{L}\right)e' = 0$$

bestimmt, welche Gleichungen immer eine Lösung haben, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} B_1\left(2+\frac{L}{L'}\right), & -B_2 \\ -B_2\ \ , & B_1\left(2+\frac{L'}{L}\right) \end{vmatrix}$$

immer von Null verschieden ist.

Aus den Gleichungen (14) erhält man in diesem Falle e und e' als Potenzreihen, die nach positiven Potenzen von J fortschreiten, welche Reihen für $J=0$ verschwinden.

Aehnliches gilt, wenn in S ein Glied von der Form

$$B_k' e' J^{2k}$$

vorkommt.

Jedem Werth von J entsprechen in diesen Fällen bestimmte Werthe von e und e', die mit J verschwinden.

Ist $|p-q|$ eine *gerade* Zahl, so kann man aber keine solchen Lösungen der Gleichungen (14) finden. Wie schon hervorgehoben worden ist, verschwinden dann P_1 und P_2 für $e=e'=0$, und folglich haben die Gleichungen (14) die Lösung

$$e = e' = 0. \tag{15}$$

Man könnte meinen, dass diese Lösung auch einer periodischen Lösung der dritten Gattung des Problems der drei Körper entspricht, und POINCARÉ giebt in seinen „Méthodes nouvelles" sogar keine andere Lösung in Bezug auf die periodischen Bahnen der dritten Gattung an. Der grosse Mathematiker hat sich indessen, scheint es mir, hier eines Fehlschlusses schuldig gemacht. Es existiren in der That keine periodischen Bahnen der dritten Gattung, die, für $\mu=0$, kreisförmig sind.

Die Bedingungen für das Auftreten periodischer Lösungen sind durch die Gleichungen (3) und (3*) gegeben. Aus den letzteren wurden die Gleichungen (10) abgeleitet, und statt deren können die Gleichungen (13) benutzt werden, wenn nämlich e und e' *nicht* gleich Null sind.

Anders ausgedrückt stellt sich die Sache so, dass die periodischen Lösungen für solche Werthe der Elemente vorkommen, für welche S ein Maximum oder ein Minimum wird. Man darf aber hierbei die Elemente *nicht* in beliebiger Weise wählen. Wird die Function S als Function von e und e' aufgefasst, so ist sie zwar, wenn $|p-q|$ eine gerade Zahl ist, für $e=e'=0$ ein Minimum ($=0$). Wenn sie aber als Function von Γ und Γ' betrachtet wird — wie es nach den Differentialgleichungen geschehen soll —, so hat sie für diese Werthe von e und e' weder ein Maximum noch ein Minimum.

Die Behandlung der Gleichungen (14), wenn $|p-q|$ eine gerade Zahl ist, könnte etwa so geschehen, dass man zuerst aus jeder der Gleichungen e als Potenzreihe von e' und J darstellt. Diese Reihen müssen für $e'=0$ verschwinden, so dass man aus (14) die beiden Reihen

$$e = e' P_3(e', J),$$

$$e = e' P_4(e', J)$$

erhält. Man würde dann noch zur Betrachtung der Gleichung

$$P_3(e', J) = P_4(e', J) \tag{15*}$$

geführt werden.

Diese Reihen verschwinden aber nicht für $e'=J=0$ und hieraus folgt, dass (15*) nur für grosse Werthe von e' oder J befriedigt werden kann.

Ob in diesem Falle e und e' nach Potenzen von J entwickelt werden können, muss durch eine besondere Untersuchung dargethan werden; diese Reihen verschwinden indessen nicht — wie es für einen ungeraden Werth von $|p-q|$ der Fall war — für $J=0$.

Der Fall $|p-q|=2$ wird in wesentlich ähnlicher Weise behandelt wie andere Fälle, für welche $|p-q|$ eine gerade Zahl ist.

Was endlich den Fall $| p - q | = 1$ betrifft, so ist dann in S_2 ein Glied ersten Grades vorhanden, das also entweder mit e oder mit e' multiplicirt ist. In beiden Fällen nehmen die Gleichungen (13) die Form

$$(16) \qquad \begin{cases} E_0 + P_5(e, e', J) = 0, \\ P_6(e, e', J) = 0, \end{cases}$$

an, wo P_5 und P_6 Potenzreihen sind, die für $e = e' = J = 0$ verschwinden. Die zweite Reihe giebt

$$e = P_7(e', J),$$

welcher Ausdruck, in die erste Gleichung (16) eingesetzt, eine Relation zwischen e' und J giebt. Die weitere Untersuchung dieser Gleichung muss wahrscheinlich unter Anwendung mechanischer Quadratur ausgeführt werden.

Aus den Gleichungen (1) und (3*) folgt, dass bei den periodischen Lösungen der dritten Gattung die Grössen $\pi - \Omega$ und $\pi' - \Omega'$ unveränderlich sind.

§ 13. Andere Gattungen periodischer Lösungen.

Die von Poincaré eingeführte Eintheilung der periodischen Lösungen füllt nicht das ganze Feld solcher Bahnen aus. Sein Ausgangspunkt ist die periodischen Bahnen für $\mu = 0$ aufzusuchen und dann die Bedingungen zu bestimmen, unter denen periodische Bahnen auch für kleine Werthe von μ vorkommen können. Erstens werden hierdurch natürlich alle solchen periodischen Bahnen ausgeschlossen, für welche μ einen so grossen Werth hat, dass die Coordinaten der Körper nicht nach Potenzen von μ entwickelt werden können. Man kann auch nicht dessen sicher sein, dass μ deswegen einen sehr grossen Werth haben muss. Wir wissen nämlich, dass μ als Factor in den Ausdrücken für die secularen Aenderungen der Perihelien und der Knoten der periodischen Bahnen vorkommt, und die Entwickelungen der Coordinaten (oder der

Elemente) nach Potenzen von μ geschieht also gleichzeitig nach Potenzen von t. Man kann mithin nicht sicher sein durch Entwickelungen nach Potenzen von μ solche Bahnen zu erreichen, für welche die Periode T eine gewisse Grösse überschreitet.

Die KEPLER'schen Ellipsen sind durch ihre Einfachheit sehr geeignet, den Ausgangspunkt für die Aufsuchung periodischer Bahnformen zu bilden. Ihre Hauptfehler in dieser Beziehung, wie für die Störungstheorie, dürften in der Unbeweglichkeit der Perihelien und der Knoten der KEPLER'schen Ellipsen zu suchen sein. Man kann aber beliebige *intermediäre* Bahnen als Ausgangspunkt benutzen, und es liegt nahe an der Hand, zu diesem Zweck von den *secularen* Werthen der Elemente auszugehen. Man würde hierdurch periodische Bahnen langer Periode berechnen können, und auch für gewisse Bahnen kurzer Periode ist diese Behandlungsweise zu empfehlen.

Auf einen anderen Umstand möchten wir hier aufmerksam machen. Es wurde im Vorhergehenden angenommen, dass die Periode T für $\mu = 0$ und $\mu \neq 0$ dieselbe ist. Es liegt nahe, sich die Frage zu stellen, ob man etwas dadurch erreichen könnte, dass man die Perioden in beiden Fällen verschieden annähme um eine Grösse, die mit μ verschwindet. Betrachten wir die Sache näher.

Es seien die Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{d y_i}{d t} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

vorgelegt, wo

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

ist, und F_0 sei nur von $x_1, x_2, \ldots, x_s$ abhängig.

Dann ist für $\mu = 0$

$$(1^*) \qquad x_i = a_i, \qquad y_i = n_i t + c_i,$$

wo

$$n_i = -\frac{\partial F_0}{\partial a_i}.$$

Wir nehmen an, dass die Lösung (1*) periodisch ist mit der Periode T.

Zur Aufsuchung der periodischen Lösungen für $\mu \neq 0$ nehmen wir an, dass die Anfangswerthe von x_i und y_i

$$x_i = a_i + \beta_i, \quad y_i = n_i t + c_i + \gamma_i$$

sind. Die hierdurch bestimmte Bewegung soll aber nicht mehr die Periode T, sondern die Periode

$$(1 + k) T$$

besitzen.

Setzen wir nun

$$t = (1 + k)\tau, \tag{2}$$

und führen τ als unabhängige Veränderliche in (1) ein, so dass nunmehr

$$\frac{d x_i}{d \tau} = (1 + k) \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{d y_i}{d \tau} = -(1 + k) \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

ist, so sind k, β_i und γ_i so zu bestimmen, dass die Bewegung für $\mu \neq 0$ periodisch ist.

Setzt man

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= a_i + \beta_i + \xi_i, \\ y_i &= n_i \tau + c_i + \gamma_i + \eta_i, \end{aligned}\right. \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{3}$$

so bekommt man für ξ_i und η_i die Differentialgleichungen

$$\frac{d \xi}{d \tau} = (1 + k) \frac{\partial F}{\partial c_i}, \quad \frac{d \eta_i}{d \tau} = -(1 + k) \frac{\partial F}{\partial a_i} - n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Die Functionen ξ_i und η_i sind nach der Voraussetzung periodische Functionen von τ mit der Periode T. Setzen wir

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1 + k}{T} \int_0^T \frac{\partial F}{\partial c_i} d\tau, \\ \psi_i &= \frac{1 + k}{T} \int_0^T \frac{\partial F}{\partial a_i} d\tau + n_i, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

so sind also die Bedingungen für eine periodische Lösung, dass

$$(5) \qquad \varphi_i = \psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Zur Erfüllung dieser $2s$-Gleichungen hat man über die $2s + 1$ Grössen β_i, γ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ und k zu verfügen. Man könnte dann meinen, dass man über eine dieser Grössen beliebig verfügen kann — z. B. $k = 0$ setzen — und dass man die übrigen $2s$ Grössen immer so bestimmen kann, dass man alle in der Umgebung von $\mu = 0$ vorhandenen periodischen Lösungen wiederfindet. Anders ausgedrückt giebt es periodische Lösungen, die für $k \neq 0$ nicht mit den für $k = 0$ erhaltenen Lösungen übereinstimmen, die aber nichtsdestoweniger für $\mu = 0$ mit den letzteren zusammenfallen?

Poincaré hat (Méth. nouv. I Nr. 38) bewiesen, dass dies der Fall sein kann.

Betrachten wir in der That die Gleichungen

$$\psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Nach (4) können wir dafür schreiben

$$(6) \qquad 0 = k \frac{\partial F_0}{\partial a_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_j} \beta_j + \frac{\mu}{T} \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial a_i} d\tau + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s),$$

wo die vernachlässigten Glieder mit μ verschwinden.

Betrachten wir die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_0}{\partial a_1}, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1^2}, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_s} \\ \frac{\partial F_0}{\partial a_2}, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2 \partial a_1}, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2^2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2 \partial a_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_0}{\partial a_s}, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_s \partial a_1}, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_s \partial a_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_s^2} \end{matrix} \right\|$$

Aus dieser Matrix können $s + 1$ Determinanten Δ_0, Δ_1, ..., Δ_s gebildet werden, indem man aus der Matrix die 1te, 2te, ..., $(s + 1)^{te}$ Colonne ausschliesst.

Ist die Determinante $\Delta_0 = 0$, während irgend eine (oder mehrere) der Determinanten Δ_1, Δ_2, ..., Δ_s nicht verschwindet, so ist die Lösung $k \neq 0$ im Allgemeinen von der für $k = 0$ erhaltenen verschieden, indem nämlich dann für $k = 0$ keine einfache Lösung der Gleichungen (6) existirt.

Schwarzschild hat (A. N. 3506, 1898) auf einen solchen Fall aufmerksam gemacht, der sich auf die periodischen Lösungen der zweiten Gattung im asteroidischen Drei-Körperproblem bezieht.

Wenn nämlich der „störende" Planet sich in einem Kreise um die Sonne bewegt, und der Asteroid, mit der Masse Null, für $\mu = 0$ in einer beliebigen Ellipse, so ist die Bewegung, für $\mu = 0$, periodisch, so oft die mittleren Bewegungen n, des Asteroiden, und n', des störenden Körpers, commensurabel sind.

Wie ist die periodische Bewegung für $\mu \neq 0$ beschaffen? Ist die Periode T in der „gestörten" und in der „ungestörten" Bewegung dieselbe, so muss die symmetrische Conjunction oder Opposition am Ende und im Anfang der Periode in derselben Länge stattfinden, da die Periode des störenden Körpers in beiden Fällen dieselbe ist. *Das Perihel des Asteroiden muss stillstehen*, wie wir in § 11 gefunden haben und zwar für beliebige Werthe der Excentricität des störenden Planeten. Eine solche periodische Bahn kann nur für einen bestimmten Werth der Excentricität auftreten, der aus der Formel (25) des betreffenden Paragraphen erhalten wird.

Hat die Excentricität einen anderen Werth, so wird das Perihel nach der Zeit T sich vorwärts oder rückwärts bewegt haben — aus VII § 11 wissen wir, dass die mittlere Bewegung des Perihels für kleine Werthe von e immer *positiv* ist — und folglich werden der Planet und der Asteroid sich nach der Zeit $T + \Delta T$ wieder in symmetrischer Conjunction oder Opposition befinden, wenn dies um die Zeit $t = 0$ der Fall ist. Durch eine geeignete Bestimmung der Elemente für $t = 0$ würde man also eine periodische Lösung mit der Periode $T + \Delta T$ erhalten können, und diese Lösung

hat nichts mit der früher erhaltenen periodischen Lösung von der Periode T gemeinsam.

Analytisch stellt sich die Sache folgendermassen.

Zwei Körper — der „Planet“ und die „Sonne“ — mit den Massen μ und 1 bewegen sich in kreisförmigen Bahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Ein dritter Körper — der Asteroid — mit verschwindender Masse wird von den zwei anderen Körpern attrahirt. Bezieht man die Bewegung des Asteroiden auf die Sonne als Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man nach V § 2

$$\text{(7)} \qquad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo

$$p_i = \frac{d q_i}{d t}$$

ist, und q_1, q_2, q_3 die rechtwinkligen Coordinaten des Asteroiden bezeichnen. Hier ist

$$\text{(8)} \qquad H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{\mu}{\varDelta} - \frac{1}{r} + \mu(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6),$$

wo $\varDelta$ den Abstand zwischen dem Asteroiden und dem Planeten bezeichnet, r den Radius Vector, q_4, q_5, q_6 die Coordinaten des Planeten bezeichnen. Der Abstand Sonne—Planet ist gleich der Einheit gewählt und die Attractionsconstante ist gleich Eins.

Fällt die XY-Ebene mit der Bahnebene des Planeten zusammen, und wird die Länge des Planeten für $t = 0$ gleich Null angenommen, so ist

$$q_4 = \cos n' t, \qquad q_5 = \sin n' t, \qquad q_6 = 0,$$

wo

$$n' = \sqrt{1 + \mu},$$

und endlich ist

$$\text{(8*)} \qquad \varDelta^2 = 1 + r^2 - 2(q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t).$$

Wird

$$H' = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{1}{r}$$

gesetzt, und werden die Differentialgleichungen

$$\frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \quad \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

nach der Methode von JACOBI integrirt, so erhält man, nach Einführung der Elemente von DELAUNAY, die Differentialgleichungen

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \right.$$

wo, durch die osculirenden elliptischen Elemente ausgedrückt,

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{a}, & l &= \text{mittlere Anomalie}, \\ G &= \sqrt{a(1-e^2)}, & g &= \pi - \Omega, \\ H &= G \cos i, & h &= \Omega \end{aligned}$$

ist.

Hier ist

$$(9^*) \quad F = \frac{1}{2L^2} + \frac{\mu}{\Delta} - \mu\,(q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t).$$

In F kommt also ausser den Elementen auch die Zeit vor. Man kann aber durch Einführung anderer Elemente die Zeit eliminiren.

Aus (8*) und (9*) ist nämlich ersichtlich, dass die Zeit nur in der Combination

$$q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t$$

vorkommt. Nach IV § 9 (23) ist aber

$$\begin{aligned} q_1 &= A\ \xi + B\ \eta, \\ q_2 &= A_1 \xi + B_1 \eta. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Coefficienten A, A_1, B, B_1 wird im citirten Paragraphen angegeben, und es ist

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = a(\cos w - e), \\ \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin w, \end{cases}$$

wo w die excentrische Anomalie bedeutet. Die Grössen ξ und η lassen sich also durch die linearen elliptischen Elemente und durch l ausdrücken.

Zieht man die Werthe der Coefficienten A_i und B_i in Betracht, so findet man indessen, dass

$$(11) \quad q_1 \cos n't + q_2 \sin n't = A'\xi + B'\eta,$$

wo

$$(11^*) \quad \begin{cases} A' = \cos g \cos(h - n't) - \sin g \sin(h - n't)\cos i, \\ B' = -\sin g \cos(h - n't) - \cos g \sin(h - n't)\cos i \end{cases}$$

ist.

Hieraus folgt, dass in F die Zeit immer in der Combination $h - n't$ vorkommt. Wird für $h - n't$ eine neue Veränderliche eingeführt, und wird gleichzeitig $n'H$ zu der charakteristischen Function F hinzuaddirt, so bekommt man ein canonisches System von Differentialgleichungen, in denen die Zeit nicht explicite vorkommt.

Wir setzen

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad y_1 = \text{mittlere Anomalie},$$

$$x_2 = \sqrt{a(1-e^2)}, \qquad y_2 = \pi - \Omega,$$

$$x_3 = \sqrt{a(1-e^2)}\cos i, \quad y_3 = \Omega - n't,$$

$$F' = \frac{1}{2x_1^2} + n'x_3 + \frac{\mu}{\Delta} - \mu(q_1 \cos n't + q_2 \sin n't),$$

wo der Ausdruck (11) für $q_1 \cos n't + q_2 \sin n't$ einzuführen ist, und

$$A' = \cos y_2 \cos y_3 - \sin y_2 \sin y_3 \frac{x_3}{x_2},$$

$$B' = -\sin y_2 \cos y_3 - \cos y_2 \sin y_3 \frac{x_3}{x_2}$$

ist. Wir haben nun

$$(11^{**}) \qquad \frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial F'}{\partial y_i}, \quad \frac{d y_i}{d t} = - \frac{\partial F'}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Aus der Form von F' finden wir

$$F' = F_0 + \mu F_1,$$

wo

$$(11^{***}) \qquad \begin{cases} F_0 = \dfrac{1}{2 x_1^2} + n' x_3, \\ F_1 = \dfrac{1}{\Delta} - (q_1 \cos n' t + q_2 \sin n' t) \end{cases}$$

ist, und weiter findet man, dass die Entwickelung von F_1 die folgende Form hat

$$F_1 = \sum A \cos (i y_1 + i' y_2 + j y_3).$$

Geschieht die Bewegung in einer Ebene (in der durch die Planetenbahn gelegenen Ebene), so bekommt man für A' und B' die Ausdrücke

$$A' = \cos (\pi - n' t),$$

$$B' = - \sin (\pi - n' t),$$

und man setzt

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad y_1 = l,$$

$$x_2 = \sqrt{a (1 - e^2)} \qquad y_2 = \pi - n' t,$$

in welchem Falle die Differentialgleichungen lauten

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{d x_1}{d t} = \dfrac{\partial F'}{\partial y_1}, & \dfrac{d y_1}{d t} = - \dfrac{\partial F'}{\partial x_1}, \\ \dfrac{d x_2}{d t} = \dfrac{\partial F'}{\partial y_2}, & \dfrac{d y_2}{d t} = - \dfrac{\partial F'}{\partial x_2}, \end{cases}$$

und

$$F_0 = \frac{1}{2 x_1^2} + n' x_2$$

ist.

Wir wollen die periodischen Lösungen der zweiten Gattung dieser Differentialgleichungen aufsuchen.

Wird die mittlere Bewegung des Asteroiden mit n bezeichnet, so dass

$$n = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1^3} \tag{13}$$

ist, so ist die erste Bedingung für eine periodische Lösung, dass n und n' commensurabel sind:

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q}, \tag{14}$$

wo p und q relativ prim sind.

In diesem Falle ist die Bewegung für $\mu = 0$ periodisch. Setzt man

$$x_1 = a_1 + \beta_1 + \xi_1, \quad y_1 = n\,t + c + \gamma_1 + \eta_1,$$
$$x_2 = a_2 + \beta_2 + \xi_2, \quad y_2 = -n'\,t + g + \gamma_2 + \eta_2;$$
$$[F] = \frac{1}{T}\int_0^T F\,d\tau = \mathsf{S}\,A_{i,i'} \cos(i\,c - i'\,g),$$

wo in der Summe i und i' alle ganzen Zahlenwerthe annehmen, für welche

$$i\,p - i'\,q = 0 \tag{15}$$

ist, also

$$[F] = \sum_{s=0}^{\infty} A_{sq,sp} \cos s\,(q\,c - p\,g), \tag{15*}$$

so erhalten wir aus (4) und (6) die Bedingungen

$$(16)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial [F]}{\partial c} = -q \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} s\,A_{sq,sp} \sin s\,(q\,c - p\,g), \\ 0 = \dfrac{\partial [F]}{\partial g} = -p \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} s\,A_{sq,sp} \sin s\,(q\,c - p\,g), \\ 0 = k\dfrac{\partial F_0}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2}\beta_1 + \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_1\,\partial x_2}\beta_2 + \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \cdots \\ 0 = k\dfrac{\partial F_0}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_2\,\partial x_1}\beta_1 + \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2}\beta_2 + \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_2} + \cdots \end{cases}$$

Da wir ohne Einschränkung $g = 0$ wählen können, so sind die zwei ersten dieser Gleichungen für

$$c = r\frac{180^\circ}{q} \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2q - 1) \tag{17}$$

erfüllt. Was die zwei letzteren Gleichungen (16) betrifft, so sieht man, dass die HESSE'sche Determinante von F_0 in Bezug auf x_1 und x_2 gleich Null ist, wogegen die Gleichungen einfache Lösungen in k und β_1 oder k und β_2 geben. Man erhält also hier verschiedene Lösungen, je nachdem $k = 0$ oder $k > 0$ angenommen wird. Für $k = 0$ erhält man eine gewöhnliche periodische Lösung der zweiten Gattung, mit stillstehendem Perihel, und die Excentricität wird durch die Gleichung

$$0 = \frac{\partial [F]}{\partial x_2} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{x_1 e}\frac{\partial [F_1]}{\partial e}. \tag{18}$$

bestimmt. Diese Lösung findet also für *bestimmte* Werthe der Excentricität statt. Diese Gleichung ist mit der Gleichung § 11 (25) identisch.

Nimmt man k von Null verschieden, so kann eine von den Grössen β_1 und β_2 gleich Null genommen werden. Es zeigt sich aber, dass der Coefficient von β_2 verschwindet, so dass man nur die Wahl $\beta_2 = 0$ hat, wenn man eine einfache Lösung erhalten will, und man erhält zur Bestimmung von k und β_1, da

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1^3}, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial x_2} = n',$$

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2} = \frac{3}{x_1^4}, \qquad \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2}$$

ist, die Gleichungen

$$0 = -\frac{k}{x_1^3} + \frac{3\beta_1}{x_1^4} + \mu\frac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \ldots,$$

$$0 = n'k + \mu\frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} + \ldots,$$

welche geben

$$
(19) \quad \begin{cases} k = -\frac{\mu}{n'} \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} + \ldots, \\ \beta_1 = \frac{x_1}{3} k - \frac{x_1^4}{3} \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \ldots, \end{cases}
$$

Wir können auch schreiben

$$
(19^*) \quad k = \mu \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}\, e} \frac{\partial [F_1]}{\partial e},
$$

wo wir $n' = 1$ genommen haben.

Die Periode hat die Länge

$$
(1 + k) T,
$$

und k bezeichnet somit die Bewegung des Perihels.[1] Der Asteroid hat während der Periode p Umläufe in der (beweglichen) Ellipse gemacht, der Planet ist q-Mal in seinem Kreise herumgegangen.

Die Aufsuchung der periodischen Lösungen, welche einer gegebenen Commensurabilität der mittleren Bewegungen entsprechen, geschieht in dieser Weise bequem und rasch, nachdem die Entwickelung der Störungsfunction gegeben ist. Da $\beta_2 = 0$ ist, so können solche Lösungen bei allen Werthen der Excentricitäten vorkommen.

Wird die Bewegung eines masselosen Körpers in *drei* Dimensionen betrachtet, so kann man aus den Gleichungen (11**) ähnliche Schlüsse ziehen. Wir werden dann zu einer periodischen Bahn mit beweglichen *Knoten* geführt. Zwischen der Excentricität und der Neigung der Bahn des Asteroiden muss eine Relation bestehen, und der Abstand des Perihels vom Knoten hält sich unverändert.

Die Bedeutung der periodischen Lösungen für die Astronomie muss als eine sehr grosse geschätzt werden. In theoretischer Hinsicht ist es, wie POINCARÉ bemerkt, mit Hilfe der periodischen Bahnen zuerst gelungen, in ein Feld einzudringen, das vorher der Analysis unzugänglich war — die Natur der Integrale des Drei-

---

[1] Man vergleiche die Gleichung (19) mit der Gleichung VII § 1 (6).

Körperproblems. Die grundlegenden Arbeiten POINCARÉ's werden hier eine unschätzbare Quelle für die Mathematiker und die Astronomen bilden. Für die praktische Astronomie werden die periodischen Lösungen bald grosse Dienste leisten. Es giebt zwar im Planetensystem, so viel bis jetzt bekannt ist, einen einzigen Fall, wo man wirklich vor einer periodischen Lösung des Drei-Körperproblems (in diesem Falle des *Vier*-Körperproblems) steht, nämlich bei den drei inneren Jupiterstrabanten. Die Bedeutung der periodischen Lösungen für die Astronomie liegt aber nicht hauptsächlich in der Möglichkeit, solche Fälle in der Natur wiederzufinden — obgleich jedes Beispiel dieser Art vom grössten Interesse ist —, sondern vielmehr in der Thatsache, dass man mit ihrer Hilfe verschiedene besonders schwierige Probleme des Himmels mit Erfolg angreifen kann. In seiner grundlegenden Arbeit über das Mondproblem geht HILL von einer periodischen Lösung der ersten Gattung aus, und seine diesbezüglichen numerischen Untersuchungen sind nicht als blosse Rechenübungen zu betrachten, sondern als eine wahre Grundlegung einer genauen Berechnung der Mondbahn. Derselbe Ausgangspunkt kann mit Vortheil auf die Theorie der kleinen Planeten Anwendung finden. Die periodischen Lösungen derselben (der ersten) Gattung werden ohne Zweifel eine wichtige Rolle für die Theorie der Nebenplaneten spielen, wie dies aus den Arbeiten von AIRY, TISSERAND, BACKLUND u. A. über die Saturnsatelliten hervorgeht. Die Librationsfälle unter den kleinen Planeten stehen in einem intimen Zusammenhang mit den periodischen Lösungen der zweiten Gattung[1] und die wichtigen Gruppenstörungen von BOHLIN sind im Grunde nichts anderes als Anwendungen derselben Lösungen, obgleich sein Ausgangspunkt hiervon etwas abweicht.

Man hat also allen Grund anzunehmen, dass die periodischen Lösungen des Drei-Körperproblems eine bedeutende Rolle in der Astronomie zu spielen bestimmt sind.

[1] Man vergleiche „Meddelanden från Lunds Observatorium Nr. 12" und die Untersuchungen im siebenten Abschnitt über die secularen Störungen der kleinen Planeten.

ZEHNTER ABSCHNITT

CONVERGENZ DER REIHEN IN DER MECHANIK DES HIMMELS

§ I. Convergenz der Reihen im Problem der zwei Körper.

Die Frage nach der Convergenz der Reihen in der Astronomie hat ihre grosse Bedeutung nicht nur in mathematischer Hinsicht, sondern vor allen Dingen wegen der wichtigen praktischen Schlussfolgerungen, die nur nach einer sorgfältigen Untersuchung der Convergenz der benutzten Reihen gezogen werden können. Folgende Fragen muss man dabei vor Augen haben. Erstens, in welchem Bereich der angewandten Veränderlichen sind die Reihen convergent? Zweitens, wie gross ist der zu befürchtende Fehler, wenn man die Entwickelungen bei einem bestimmten Glied abbricht? Endlich lassen sich unter Umständen aus den Convergenzuntersuchungen Schlüsse ziehen in Bezug auf die Aufsuchung derjenigen Entwickelungsmethoden, die für die numerischen Rechnungen die grössten Vortheile gewähren.

Die zweite und dritte Kategorie dieser Fragen ist bis jetzt wenig untersucht worden, obgleich wichtige Ansätze hier und da nicht fehlen. Ich erinnere z. B. an die Untersuchungen über die Euler'sche Reihe und ihre Bedeutung für die sogenannte mechanische Quadratur (vergl. den achten Abschnitt). Es fehlen auch nicht ähnliche Untersuchungen in der Störungstheorie. Indessen liegt hier ein grosses grösstentheils unangebautes Feld vor, wo man mit Hilfe der vorliegenden Convergenzuntersuchungen für die Astronomie höchst wichtige Schlussfolgerungen noch zu erwarten hat.

In Bezug auf die erste Frage, die ja auch für die anderen Fragen grundlegend ist, sind indessen die Untersuchungen weiter getrieben worden, obgleich auch hier verschiedene Probleme noch auf ihre Lösung warten. Das wichtigste Ergebniss dieser Untersuchungen ist, dass es noch nicht gelungen ist Ausdrücke für die Coordinaten im Probleme der drei Körper zu finden, die für eine

unbeschränkte Zeit ihre Gültigkeit behalten, oder wenigstens, dass es noch nicht bewiesen worden ist, dass derartige Ausdrücke existiren. Die überaus wichtige Frage von den Grenzwerthen der Coordinaten im Drei-Körperproblem — eine Frage, die man kurz als die *Stabilitätsfrage* bezeichnet — ist also immer noch als eine offene zu betrachten, obgleich man wohl kaum als ein allzu phantastischer Wahrsager betrachtet werden müsste, wenn man die Vermuthung ausdrückte, dass ihre Lösung nicht viele Jahrzehnte auf sich warten lässt.

Wir haben in diesem Paragraphen die Entwickelungen der relativen Coordinaten im Problem der *zwei* Körper zu untersuchen. Im § 9 des vierten Abschnittes wurde gezeigt, dass die Coordinaten im Zwei-Körperproblem, wenn es sich um die *elliptische* Bewegung handelt, periodische Functionen der mittleren Anomalie sind, die sich als FOURIER'sche Reihen der folgenden Form darstellen lassen:

$$\sum A_i \cos il + \sqrt{1-e^2} \sum B_i \sin il, \tag{1}$$

wo $l = n(t - t_\pi)$ ist.

Es wurde in demselben Paragraphen bewiesen, dass diese Reihen für alle *reellen* Werthe von l (also auch für alle reellen Werthe der Zeit) und für alle endlichen Werthe der Excentricität — e — convergiren. Es genügt solche Werthe von e zu betrachten, deren absoluter Betrag kleiner als die Einheit ist.

Die Coefficienten A_i und B_i sind holomorphe Functionen von e, die für einen beliebigen endlichen Werth e_0, für e, nach positiven Potenzen von $e - e_0$ entwickelt werden können.

Die Functionen $\cos il$ und $\sin il$ sind andererseits offenbar holomorphe Functionen von t, und jedes Glied in den obigen Summen lässt sich also, für beliebige endliche Werthe von e_0 und t_0, nach positiven Potenzen von $e - e_0$ und $t - t_0$ entwickeln, und zwar für beliebig hohe Werthe von $e - e_0$ und $t - t_0$.

Hieraus folgt aber nicht, dass die *Summen* (1), und somit die Coordinaten, als Reihen nach Potenzen von $e - e_0$ und $t - t_0$ entwickelt werden können, die für beliebig hohe Werthe von $e - e_0$ und $t - t_0$ convergiren. Um diesen Schluss zu ziehen, ist es nothwendig,

dass die Reihen (1) gewisse Bedingungen erfüllen, die von WEIERSTRASS in einer berühmten Abhandlung („Zur Functionenlehre“ 1880) auseinandergesetzt worden sind, und welche Bedingungen hier nicht erfüllt sind.

Bei vielen Gelegenheiten muss man indessen Entwickelungen der Coordinaten nach Potenzen der Excentricitäten oder der Zeit anwenden, und es entsteht somit die Aufgabe, den Convergenzbereich dieser Entwickelungen zu bestimmen.

Die Entwickelung der Coordinaten nach *Potenzen der Excentricität*, die wir in diesem Paragraphen untersuchen wollen, wurde zuerst von LAPLACE im Anhang zum fünften Bande seiner „Mécanique céleste“ (1825) untersucht. Seine Methode ist, ihrem Principe nach, einfach und direct, erfordert aber bei der Ausführung sehr lange und schwierige Auseinandersetzungen. Später hat CAUCHY und, nach seinem Vorgange, ROUCHÉ die Frage vom Gesichtspunkte der CAUCHY'schen Functionenlehre behandelt, und einen ähnlichen Ausgangspunkt haben in letzterer Zeit die meisten Arbeiten über dieses Problem gewählt. Ich möchte unter diesen die Untersuchungen von BRIOT und BOUQUET in ihrer „Théorie des fonctions elliptiques“ (Quartausgabe) besonders hervorheben.

Diese Untersuchungen beziehen sich auf die Entwickelung der Coordinaten nach Potenzen von e, also, nach der Terminologie von WEIERSTRASS, auf die Entwickelung dieser Functionen in der Umgebung der Stelle $e = 0$. Hieraus kann man indessen nicht direct den Convergenzbereich der Entwickelung der Functionen in der Umgebung einer beliebigen Stelle $e = e_0$ bestimmen. Diese letztere Frage ist vom Verfasser untersucht worden (Meddelanden från Lunds Observatorium Nr. 22) und ich gebe hier die Hauptzüge dieser Auseinandersetzung wieder.

In § 9 des vierten Abschnittes haben wir für die relativen Coordinaten im Zwei-Körperproblem folgende Ausdrücke gefunden:

$$x = A\,\xi + B\,\eta,$$

$$y = A_1\,\xi + B_1\,\eta,$$

$$z = A_2\,\xi + B_2\,\eta,$$

wo A_i und B_i gewisse trigonometrische Functionen der Perihellänge, der Knotenlänge und der Neigung sind, und wo

$$\xi = a(\cos w - e),$$

$$\eta = a\sqrt{1-e^2}\sin w$$

ist. Hier bedeutet w die excentrische Anomalie des Planeten. Die Coordinaten sind also *holomorphe* Functionen der excentrischen Anomalie.

Wenn man die Coordinaten als Functionen der Excentricität betrachtet, so ist der Convergenzbereich der Entwickelungen der Coordinaten nach Potenzen von $e - e_0$ von der Lage der singulären Punkte dieser Functionen abhängig. Die obigen Ausdrücke zeigen aber, dass diese singulären Punkte theils $e = 1$ (welcher Punkt ein Verzweigungspunkt der Function $\sqrt{1-e^2}$ ist), theils die singulären Punkte der Function w — als Function von e betrachtet — sind.

Die Aufgabe wird somit auf die folgende reducirt: welchen Convergenzbereich hat die Entwickelung von w nach Potenzen von $e - e_0$?

Der functionale Zusammenhang zwischen der excentrischen Anomalie und der Excentricität ist durch die Kepler'sche Gleichung gegeben.

Wird die Excentricität mit ζ, die mittlere Anomalie mit l bezeichnet, so lautet diese Gleichung

$$w - \zeta \sin w = l. \tag{1}$$

Indem man hier w als eine Function von ζ betrachtet, kann l als ein (constanter) Parameter angesehen werden, der einen beliebigen *reellen* Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann. Wir setzen

$$w = \varphi(\zeta), \tag{2}$$

oder wenn man den Parameter l andeuten will

$$w = \varphi(\zeta, l). \tag{2*}$$

Es handelt sich um die Bestimmung der singulären Punkte der Function φ. Wenn die Lagen dieser Punkte bestimmt sind, so weiss man, dass die Entwickelung von w in der Umgebung der Stelle $\zeta = \zeta_0$ innerhalb eines Kreises convergent ist, dessen Mittelpunkt in ζ_0 liegt und dessen Peripherie durch den *nächstliegenden* singulären Punkt geht.

Die Function φ ist eine unendlich vieldeutige Function von ζ, so dass zu einem gegebenen Werth von ζ eine unendliche Zahl von Werthen für w gehört. Man kann diese Werthe in folgender Weise finden.

Gesetzt

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad w = x + iy, \; \varkappa^2 = \xi^2 + \eta^2, \tag{3}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, so erhält man aus (1), indem man die reellen und die imaginären Theile trennt, die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \varkappa^2 \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} &= (x - l)\xi + y\eta, \\ \varkappa^2 \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} &= y\xi - (x - l)\eta. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Wir nehmen zuerst an, dass die Excentricität einen *reellen* Werth hat, so dass $\eta = 0$ ist.

Aus (4) ist ersichtlich, dass die Werthe

$$\left\{\begin{aligned} y &= 0, \\ x - l &= \xi \sin x \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dann immer *eine* Lösung der Gleichungen (4) geben. Ist $\xi < 1$, wie wir hier vorläufig annehmen, so ist die zweite Gleichung (5) für einen einzigen Werth von x erfüllt. Dies ist, wie gleich bewiesen werden wird, der einzige reelle Werth von w in diesem Falle.

Um die übrigen Werthe von w zu bestimmen, schreiben wir die Relation (4) — wo noch immer $\eta = 0$ gesetzt wird — in der Form:

$$
(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = \dfrac{x - l}{\xi \sin x}, \\[2ex] \dfrac{e^y - e^{-y}}{2y} = \dfrac{1}{\xi \cos x}. \end{cases}
$$

Die Werthe von x und y, die diesen Gleichungen genügen, können in graphischer Weise leicht erhalten werden. Wir betrachten nämlich diese Gleichungen als die Gleichungen zweier Curven, die wir bez. mit (A) und (B) bezeichnen wollen. Die Schnittpunkte dieser Curven geben die gesuchten Werthe von x und y.

Die Curve (B) besteht aus einer unendlichen Schaar von Zweigen, die alle dadurch erhalten werden können, dass man einen beliebigen Zweig parallel der x-Achse um die Länge $2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

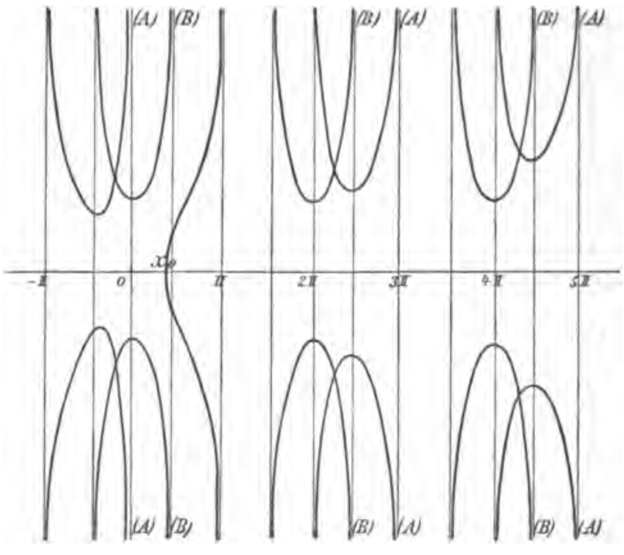


Fig. 17.

verschiebt. Es genügt also hier einen einzigen Zweig zu untersuchen, und da ausserdem beide Curven zur x-Achse symmetrisch sind, so genügt es, positive Werthe von y in Betracht zu ziehen.

Die linke Seite der Gleichung für (B)

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2y} = \frac{1}{\xi \cos x}$$

wächst stetig mit y und hat also für $y = 0$ ihren Minimalwerth, der gleich der Einheit ist. Man findet dies am leichtesten, indem man für e^y und e^{-y} Potenzreihen einführt. Zu jedem Werth von x gehört also ein einziger Werth von y. Der Minimalwerth von y wird für $x = 0$ erhalten und ist also aus der Gleichung

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2y} = \frac{1}{\xi}$$

bestimmt. Da wir hier $\xi < 1$ angenommen haben, schneidet die Curve (B) also niemals die x-Achse. Für $x = \pm \frac{\pi}{2}$ wird $y = \infty$. Der hier betrachtete Curvenzweig nähert sich also asymptotisch den beiden durch $x = \pm \frac{\pi}{2}$ definirten geraden Linien.

Was die Curve (A) betrifft, so ist ihre Discussion ähnlicher Art. Die linke Seite hat einen Minimalwerth gleich Eins für $y = 0$ und wächst mit wachsendem y stetig ins Unendliche. Die Curve besteht aus einer unendlichen Zahl von Zweigen, welche sich den zu der y-Achse parallelen Linien $x = n\pi\,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ nähern. Die Curve ist zur x-Achse symmetrisch und die verschiedenen Zweige sind zwischen den beiden parallelen Geraden $x = 2n\pi$ und $x = (2n + 1)\pi$ eingeschlossen. Es giebt ausserdem einen Curvenzweig zwischen $x = 0$ und $x = \pi$. Dieser Zweig schneidet die x-Achse in demjenigen Punkte x_0, der durch die Gleichung

$$x_0 - \xi \sin x_0 = l \tag{7}$$

bestimmt ist und nähert sich asymptotisch der Geraden $x = \pi$.

Die Curven haben für $\xi = 1/2$, $l = \frac{\pi}{4}$ den durch die beigefügte Fig. 17 angezeigten Verlauf.

Die Werthe der Function $\varphi(\zeta)$ für diesen Werth der Excentricität und der mittleren Anomalie sind durch die Schnittpunkte zwischen den beiden Curvenschaaren gegeben. *Ein* Werth, x_0, ist reell und wird aus (7) gefunden. Die x-Coordinaten der übrigen Werthe sind zwischen $x = 4n\frac{\pi}{2}$ und $x = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ gelegen für $n = 1, 2, 3, \ldots$, und zwischen $x = 4n\frac{\pi}{2}$ und $x = (4n-1)\frac{\pi}{2}$ für $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$, und nähern sich mit wachsendem n den Werthen $x = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ für positive Werthe von n und den Werthen $x = (4n-1)\frac{\pi}{2}$ für negative Werthe von n. Die y-Coordinaten gehen mit wachsendem n ins Unendliche. Ich gebe unten die Gleichung einer Curve an, die durch sämmtliche Schnittpunkte der Curven (A) und (B) hindurchgeht.

Hat die Excentricität einen imaginären Werth, so ist die Berechnung der entsprechenden Werthe von w etwas mühsamer. Sie lässt sich aber auch dann in elementarer Weise ausführen. Aus (4) leitet man in der That folgende Gleichungen ab:

$$\text{(a)} \qquad \tfrac{1}{4}\varkappa^2\{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x\} = (x-l)^2 + y^2,$$

$$\text{(b)} \qquad \varkappa^4 = \frac{4[(x-l)\xi + y\eta]^2}{(e^y + e^{-y})^2} + \frac{4[y\xi - (x-l)\eta]^2}{(e^y - e^{-y})^2},$$

$$\text{(c)} \qquad \varkappa^4 = \frac{[(x-l)\xi + y\eta]^2}{\sin^2 x} - \frac{[y\xi - (x-l)\eta]^2}{\cos^2 x},$$

oder wenn man in diesen Gleichungen die x- und die y-Coordinaten separirt:

$$\text{(a)} \qquad e^{2y} + e^{-2y} - \frac{4y^2}{\varkappa^2} = 2\cos 2x + \frac{4(x-l)^2}{\varkappa^2},$$

$$\text{(b)} \quad \tfrac{1}{4}\varkappa^4(e^{2y} - e^{-2y})^2 = (x-l)^2[\varkappa^2 e^{2y} + \varkappa^2 e^{-2y} - 2(\xi^2 - \eta^2)]$$
$$- 8(x-l)y\xi\eta$$
$$+ y^2[\varkappa^2 e^{2y} + \varkappa^2 e^{-2y} + 2(\xi^2 - \eta^2)],$$

$$\text{(c)} \qquad x^4 = y^2\left[\frac{\eta^2}{\sin^2 x} - \frac{\xi^2}{\cos^2 x}\right] +$$
$$+ 2y\left[\frac{(x-l)\,\xi\,\eta}{\sin^2 x} + \frac{(x-l)\,\xi\,\eta}{\cos^2 x}\right]$$
$$+ (x-l)^2\left[\frac{\xi^2}{\sin^2 x} - \frac{\eta^2}{\cos^2 x}\right].$$

Diese Gleichungen können sämmtlich auf die Form

$$f(x) = g(y)$$

gebracht werden, wo $f(x)$ und $g(y)$ bestimmte Functionen von x und y sind. Curven, deren Gleichungen von dieser Form sind, können indessen immer leicht gezeichnet werden.

Die Schnittpunkte zweier der Curven (a), (b) oder (c) bestimmen die Werthe von x und y. Die Gleichung (a) kann als die „Modulgleichung“ bezeichnet werden, da sie nur vom Modul, also nicht vom Werthe des imaginären und des reellen Theils der Excentricität abhängt. Die entsprechende Curve unterscheidet sich von den übrigen darin, dass sie einen continuirlichen Verlauf hat.

Bei der Discussion der Gleichungen (b) und (c) muss man darauf achten, dass die durch Quadriren der Gleichungen (4) erhaltenen falschen Wurzeln eliminirt werden.

Wir haben also gefunden, dass w eine unendlich vieldeutige Function der Excentricität ist. Hat die Excentricität einen reellen Werth, der kleiner als Eins ist, so ist von den entsprechenden Werthen von w eine einzige Wurzel reell. Es ist diese Wurzel, die für die astronomische Anwendung der Kepler'schen Gleichung von Interesse ist.

Es handelt sich darum, diese Wurzel für einen gegebenen Werth ζ_0 von ζ nach Potenzen von $\zeta - \zeta_0$ zu entwickeln.

Man kann sich zu diesem Zweck des Cauchy'schen Existenztheorems (IX § 6) bedienen.

Aus der Gleichung

$$\text{(8)} \qquad w - l - \zeta \sin w = 0$$

folgt nämlich die entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\sin w}{1 - \zeta\cos w}. \tag{9}$$

Das Existenztheorem von CAUCHY sagt nun aus, dass das Integral w dieser Gleichung, das für $\zeta = \zeta_0$ den Werth $w = w_0$ annimmt, sich nach Potenzen von $\zeta - \zeta_0$ in der Form

$$w = w_0 + c_1(\zeta - \zeta_0) + c_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \ldots$$

entwickeln lässt, so oft die rechte Seite von (9) nach positiven Potenzen von $w - w_0$ und $\zeta - \zeta_0$ entwickelt werden kann.

Die singulären Werthe von ζ, für welche eine derartige Entwickelung nicht existirt, werden also erhalten, indem man w zwischen den beiden Gleichungen

$$w - l - \zeta\sin w = 0 \tag{8}$$

und

$$1 - \zeta\cos w = 0 \tag{10}$$

eliminirt.

Die Lage dieser singulären Punkte kann in folgender Weise ermittelt werden.

Aus (10) erhält man

$$\sqrt{-1}\sin w = \pm\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1},$$

$$e^{\sqrt{-1}w} = \frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1},$$

und schreibt man (8) in der Form

$$e^{\sqrt{-1}w} = e^{\sqrt{-1}\zeta\sin w + l\sqrt{-1}},$$

so erhält man die folgende Gleichung zur Bestimmung der singulären Werthe von ζ

$$\frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} = e^{\pm\sqrt{1-\zeta^2} + \sqrt{-1}l}. \tag{11}$$

Man kann diese Gleichung mit ζ multipliciren, wenn man nur beachtet, dass die hierdurch eingeführte Wurzel $\zeta = 0$ die Gleichung (11) nicht befriedigt und also keine singuläre Wurzel ist. Man erhält somit die Gleichung

$$(12) \qquad 1 \pm \sqrt{1-\zeta^2} = \zeta e^{\pm\sqrt{1-\zeta^2}+\sqrt{-1}\,l}.$$

Man hat die Wurzeln dieser Gleichung zu berechnen.

Setzt man zu diesem Zwecke

$$(13) \qquad z = 1 \mp \sqrt{1-\zeta^2},$$

welche Gleichung giebt

$$(13^*) \qquad \zeta^2 = 2z - z^2,$$

so erhält man aus (12) die Gleichung

$$(14) \qquad \left(\frac{2}{z} - 1\right) e^{2z} = e^{2+\sqrt{-1}\,2l}.$$

Der Parameter l hat einen beliebigen *reellen* Werth. Dagegen kann man für die entsprechenden z reelle oder imaginäre Werthe erhalten. Setzt man also

$$z = \varrho\, e^{\theta i} = \varrho \cos\theta + \sqrt{-1}\,\varrho \sin\theta$$

und trennt in (14) die reellen und die imaginären Theile rechter und linker Seite, so erhält man die beiden Gleichungen

$$(15) \qquad \begin{cases} e^{2\varrho\cos\theta}\left[\dfrac{2}{\varrho}\cos(2\varrho\sin\theta - \theta) - \cos(2\varrho\sin\theta)\right] = e^2\cos 2l, \\[2ex] e^{2\varrho\cos\theta}\left[\dfrac{2}{\varrho}\sin(2\varrho\sin\theta - \theta) - \sin(2\varrho\sin\theta)\right] = e^2\sin 2l, \end{cases}$$

aus welchen man die folgenden bequemen Gleichungen ableitet

$$\frac{4}{\varrho^2} + 1 - \frac{4}{\varrho}\cos\theta = e^{4 - 4\varrho\cos\theta}, \tag{16}$$

$$\frac{2}{\varrho}\sin(2l + \theta - 2\varrho\sin\theta) - \sin(2l - 2\varrho\sin\theta) = 0. \tag{17}$$

Wir betrachten diese Gleichungen als die Gleichungen zweier reellen Curven, deren Schnittpunkte uns die Lage der singulären Punkte giebt.

Die Curve (16), die von l unabhängig ist, besteht aus zwei getrennten Zweigen. Der eine, den wir unten näher betrachten wollen, ist von lemniscatenähnlicher Form, und hat für $\varrho\cos\theta = 1$ einen Doppelpunkt. Der andere Zweig besteht aus der geraden Linie $\varrho\cos\theta = 1$ (Fig. 18).

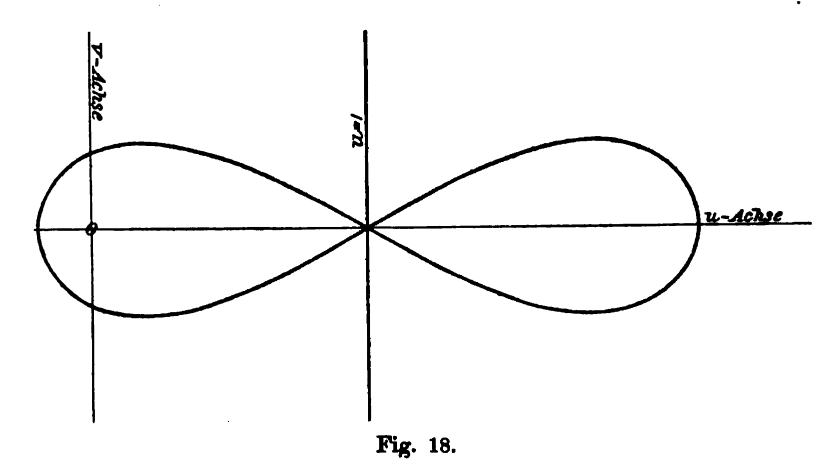


Fig. 18.

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit (17) sind leicht zu bestimmen. Setzt man $\varrho = 1 : \cos\theta$ in (17) ein, so erhält man nämlich die Lösungen

$$\left\{\begin{aligned} \theta - \operatorname{tg}\theta &= \frac{n\pi}{2} - l, \\ \varrho &= \frac{1}{\cos\theta}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Diese singulären Punkte sind also eine unendliche Zahl isolirter Punkte, die sämmtlich auf der Linie $\varrho\cos\theta = 1$ gelegen sind.

Die Discussion der Curven (16) und (17) wird durch die Einführung geradliniger Coordinaten erleichtert. Setzt man also

$$u = \varrho \cos\theta, \qquad v = \varrho \sin\theta,$$

so erhalten wir diese Gleichungen unter folgender Form

$$(19) \qquad v^2 = \frac{4(1-u)}{e^{4(1-u)} - 1} - u^2,$$

$$(20) \qquad (u-1)^2 = 1 + 2v \operatorname{cotg}(2l - 2v) - v^2,$$

wo zu bemerken ist, dass zu (19) noch die Curve $u = 1$, die wir schon discutirt haben, hinzukommt.

Die Curve (19) ist zur Achse der u-Coordinaten symmetrisch und ebenfalls zu der geraden Linie $u = 1$. Setzt man nämlich

$$s = 1 - u,$$

so kann man (19) in der Form

$$(21) \qquad v^2 = -1 - s^2 + 2s\frac{e^{2s} + e^{-2s}}{e^{2s} - e^{-2s}},$$

oder

$$v^2 = 2s \operatorname{cotghp} 2s - s^2 - 1$$

schreiben, woraus der Satz unmittelbar folgt.

Weiter kann s nicht beliebig gross werden. Die Maximalwerthe für s werden aus der Gleichung $v = 0$ erhalten, welche giebt

$$(21^*) \qquad e^{4s} = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2.$$

Diese Gleichung hat zwei Wurzeln: $s = 0$ und $s = 1.195$ (genähert). Die erste Wurzel giebt einen Doppelpunkt, die zweite ist der gesuchte Maximalpunkt.

Das Aussehen der Curve (19) ist aus der Fig. 18 ersichtlich.

In der Umgebung des Punktes $s = 0$ hat man genähert

$$v^2 = \frac{1}{3} s^2,$$

so dass die Curve hier aus den beiden Geraden

$$v = \frac{s}{\sqrt{3}}$$

und

$$v = -\frac{s}{\sqrt{3}}$$

besteht.

Die Form der Curve (17) oder (20) zu kennen, ist nicht für unseren jetzigen Zweck nothwendig. In der That hängt die Form dieser Curve vom Werthe des Parameters l ab, und indem l sich verändert, bewegt sich der Schnittpunkt zwischen (16) und (17), also auch der singuläre Punkt der KEPLER'schen Gleichung auf der Curve (16). Für die Convergenz der nach den Potenzen der Excentricität fortschreitenden Reihen in der Astronomie, ist aber nothwendig, dass die Excentricität einen solchen Werth hat, dass die Reihen für *alle reellen Werthe von l* convergent bleiben. Der gesuchte Convergenzradius ist also der *kleinste* Radius, den man erhält, indem man l zwischen $-\infty$ und $+\infty$ variiren lässt. Nun kann man aber beweisen, dass die reelle Grösse l immer so gewählt werden kann, dass die Curve (17) durch einen beliebigen Punkt auf der Curve (16) hindurchgeht. Es genügt also diese Curve zu betrachten, weil jeder Punkt derselben ein singulärer Punkt sein kann, und also auch als ein singulärer Punkt betrachtet werden muss.

Dass die Grösse l in dieser Weise gewählt werden kann, beweist man folgendermassen.

Erstens findet man unmittelbar aus der Gleichung (18), dass jeder Punkt der Linie $\varrho \cos \theta = 1$ ein singulärer Punkt werden kann. Wird ein beliebiger Werth $\theta = \theta_0$ gewählt, so erhält man das entsprechende l aus der Gleichung

$$l = \frac{n\pi}{2} - \theta_0 + \operatorname{tg} \theta_0.$$

Dass die Curve (20) bei einer geeigneten Wahl des Parameters l durch jeden beliebigen Punkt von (19) gehen muss, ist ebenso leicht zu finden. Werden nämlich beliebige Werthe u_0 und v_0 für u und v angenommen, so ist (20) erfüllt, wenn l so gewählt wird, dass

$$\operatorname{tg}(2l - 2v_0) = \frac{2 v_0}{(u_0 - 1)^2 - 1 + v_0^2}$$

ist, was durch eine geeignete Wahl von l immer erreicht werden kann.

Von u und v gehen wir mittelst der Gleichung (13*) zu ζ über. Setzen wir

$$\zeta = \xi + i\eta = \varkappa e^{\tau\sqrt{-1}}, \tag{22}$$

so erhalten wir, indem wir die reellen und die imaginären Theile in (13*) trennen,

$$\left\{\begin{aligned} \varkappa^2 \cos 2\tau &= -(1-u)^2 + v^2 + 1\,, \\ \varkappa^2 \sin 2\tau &= \quad 2v(1-u)\,, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

aus welchen Gleichungen $\varkappa$ und τ und also auch ξ und η berechnet werden können.

Die Curve (19) geht hierdurch in eine Curve über, welche diejenigen Werthe der Excentricität giebt, für welche die Function (2) $\varphi(\zeta)$ Singularitäten besitzt. Diese Singularitäten sind alle Verzweigungspunkte.

Die so erhaltene Curve, welche die *singuläre Curve der elliptischen Bewegung* genannt werden kann, und die in Fig. 19 wiedergegeben ist, besteht aus einer geschlossenen Curve $ABCD$ um den Anfangspunkt O der Coordinaten, und zwei geradlinigen Theilen AE und CF, die mit der positiven bez. negativen ξ-Achse zusammenfallen, wenn die Stücke dieser Achse zwischen O und A bez. zwischen O und C weggenommen werden. Der Radius Vector von O nach einem Punkt der Curve, der mit dem absoluten

Betrag oder *Modulus* von ζ zusammenfällt, ist in A gleich der Einheit und nimmt continuirlich bis B ab, wo er den Werth 0.6627...

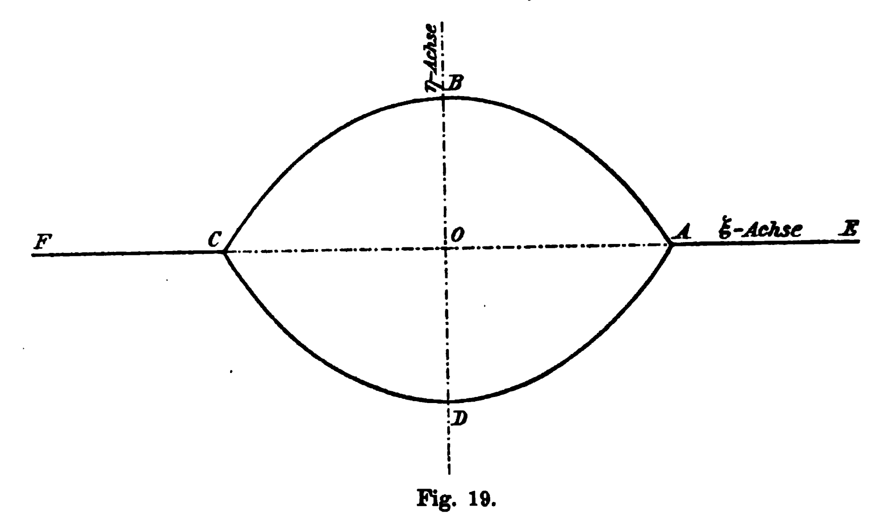


Fig. 19.

hat. Man findet den Werth q dieses Moduls, indem man in (12) $l = \frac{\pi}{2}$ und $\zeta = iq$ setzt, und die so erhaltene Gleichung

$$(24) \qquad 1 + \sqrt{1 + q^2} = q\, e^{\sqrt{1 + q^2}}$$

nach q auflöst.

Die Formel (24) fällt mit der bekannten LAPLACE'schen Formel für die Berechnung des Convergenzradius der Entwickelung der Coordinaten nach Potenzen der Excentricität (in der Umgebung von $\zeta = 0$) zusammen. Man erhält denselben Werth, wenn man die Gleichung (21*), die hier in der Form

$$(24^*) \qquad e^{2s} = \frac{s+1}{s-1}$$

geschrieben werden kann, nach s autlöst und dann nach (23) $q (= \varkappa)$ aus der Formel

$$(24^{**}) \qquad q = \sqrt{s^2 - 1}$$

berechnet. Man findet in der That, dass diese Gleichungssysteme identisch sind.

Die Fig. 19 wurde aus den folgenden numerischen Werthen der Coordinaten ξ und η der singulären Curve berechnet.

Tabelle I.

Coordinaten der singulären Curve.

s	v	$\varkappa$	ξ	η
0.0	0.000	1.000	1.000	0.000
0.1	0.057	0.9966	0.9965	0.0057
0.2	0.114	0.9868	0.9865	0.0231
0.3	0.165	0.9707	0.9694	0.0511
0.4	0.212	0.9491	0.9449	0.0896
0.5	0.251	0.9226	0.9122	0.1376
0.6	0.282	0.8917	0.8702	0.1945
0.7	0.302	0.8574	0.8174	0.2586
0.8	0.310	0.8208	0.7514	0.3299
0.9	0.302	0.7823	0.6681	0.4068
1.0	0.273	0.7413	0.5586	0.4873
1.1	0.211	0.7021	0.4047	0.5737
1.13	0.181	0.6899	0.3406	0.5999
1.16	0.140	0.6779	0.2585	0.6268
1.19	0.071	0.6665	0.1287	0.6539

Die Curve hat für $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$ eine Spitze, und geht hier in die geraden Linien $\eta = 0$ ($|\xi| > 1$) über. Indem ξ gegen Null abnimmt, wächst η continuirlich, um für $\xi = 0$ dem LAPLACE'schen Convergenzradius gleich zu werden. Der Winkel bei A ist gleich 120°.

Die singuläre Curve erlaubt in einfacher Weise die Frage nach der Grösse des Convergenzradius bei der Entwickelung der Coordinaten in der elliptischen Bewegung nach Potenzen von $\zeta - \zeta_0$ zu beantworten. Man nimmt zu diesem Zwecke ζ_0 als Mittelpunkt

eines Kreises an, und sucht den kleinsten Kreis auf, der die singuläre Curve berührt. Der Radius dieses Kreises ist gleich dem gesuchten Convergenzradius.

Nimmt man z. B. an, dass man die Coordinaten nach Potenzen von $\zeta - 0.3$ entwickeln will, so erhält man mittelst der Figur für den Convergenzradius den Werth 0.544 und folglich ist die betreffende Entwickelung für alle solchen reellen Werthe — ξ — der Excentricität convergent, die zwischen $\xi = -0.244$ und $\xi = +0.844$ liegen. Die betreffenden Reihen convergiren also für alle *positiven* Werthe der Excentricität, die kleiner als 0.844 sind, wogegen die Entwickelungen nach Potenzen von ξ nur für $\xi < 0.6627$ convergiren. Da es bei den astronomischen Anwendungen solcher Reihen nur auf die reellen Werthe der Excentricität ankommt, kann man also den Convergenzbereich der Reihen vergrössern, indem man nach Potenzen von $\zeta - \zeta_0$ entwickelt und ζ_0 in geeigneter Weise bestimmt. Die nachstehende kleine Tabelle giebt eine genäherte Darstellung der Convergenzverhältnisse bei verschiedenen Werthen von ζ_0.

Tabelle II.

Werthe des Convergenzradius.

ζ_0	R	$\zeta_{min.}$	$\zeta_{max.}$
0.0	0.663	0.0	0.663
0.1	0.644	0.0	0.744
0.2	0.598	0.0	0.798
0.3	0.544	0.0	0.844
0.4	0.480	0.0	0.880
0.5	0.409	0.091	0.909
0.6	0.330	0.270	0.930
0.7	0.251	0.449	0.951
0.8	0.169	0.631	0.969
0.9	0.087	0.813	0.987

Es bedeutet hier R den Werth des Convergenzradius bei einer Entwickelung nach Potenzen von $\zeta - \zeta_0$. Unter $\zeta_{\text{min.}}$ ist der kleinste *positive* Werth der Excentricität verstanden, der innerhalb des Convergenzkreises liegt.

Obgleich der Convergenzradius stetig verkleinert wird, indem ζ_0 von Null wächst, wird der Bereich der *positiven* ζ-Werthe innerhalb des Convergenzkreises immer grösser, bis man zu einem zwischen 0.4 und 0.5 gelegenen Werth — ungefähr gleich 0.445 — für ζ_0 gelangt.[1] Eine Entwickelung nach Potenzen von $\zeta - 0.445$ würde für alle positiven Werthe der Excentricität, welche kleiner als 0.892 sind, convergiren.

Eine ähnliche Untersuchung in Bezug auf die entsprechende Entwickelung der Coordinaten in der *hyperbolischen* Bahnbewegung wäre leicht auszuführen, liegt aber bis jetzt nicht vor.

§ 2. Convergenz der Reihen im Problem der zwei Körper. Fortsetzung.

Wir haben im vorigen Paragraphen gefunden, dass die Coordinaten in der elliptischen Bewegung holomorphe Functionen der excentrischen Anomalie sind, und dass die excentrische Anomalie von zwei Grössen abhängt, nämlich von der Bahnexcentricität ζ und von der mittleren Anomalie l des Planeten. Bei mehreren Gelegenheiten, im Besonderen bei der Bestimmung der Elemente eines Planeten aus gegebenen Beobachtungen, ist es angemessen, sich der Entwickelungen der Coordinaten nach Potenzen der mittleren Anomalie zu bedienen, und die Bestimmung des Convergenzradius in diesen Entwickelungen ist also von grosser practischer Bedeutung. Da

$$l = n(t - t_\pi)$$

ist, wo t_π die Zeit für den Durchgang des Planeten durch das Perihel bezeichnet, so ist eine Entwickelung nach Potenzen von

---

[1] Eine andere Sache ist die *Stärke* der Convergenz. Diese ist am grössten für $\zeta_0 = 0$, wo der Convergenzradius seinen Maximalwerth hat.

$l - l_0$, wo $l_0 = n(t_0 - t_\pi)$ ist, mit einer Entwickelung nach Potenzen von $t - t_0$, also mit einer Entwickelung nach Potenzen der Zeit, gleichbedeutend.

Der Convergenzbereich dieser Entwickelungen ist leichter zu bestimmen als derjenige der Entwickelungen nach Potenzen der Excentricität, diese Bestimmung geschieht aber in ähnlicher Weise. Aus der KEPLER'schen Gleichung

$$w - \zeta \sin w = l \tag{1}$$

ist w als eine Function von ζ und l

$$w = \varphi(\zeta, l) \tag{2}$$

definirt. Wir haben im vorigen Paragraphen l als einen reellen Parameter betrachtet und w als eine Function der Veränderlichen ζ. Hier werden wir l als eine Veränderliche betrachten und ζ als einen Parameter, den wir als *reell, positiv und kleiner als Eins* annehmen wollen, da dieser Fall allein für die Astronomie von Interesse ist.

Erstens ist dann zu bemerken, dass w eine unendlich vieldeutige Function von l ist. Dies folgt in der That aus der im vorigen Paragraphen gemachten Untersuchung, in der bewiesen wurde, dass zu gegebenen Werthen von ζ und l unendlich viele Werthe von w gehören. Die Function $\varphi(\zeta, l)$, als Function von l betrachtet, ist also eine vieldeutige Function, und es handelt sich darum, die singulären Punkte — Verzweigungspunkte — dieser Function aufzusuchen.

Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dl} = \frac{1}{1 - \zeta \cos w} \tag{3}$$

folgt, wie im vorigen Paragraphen, dass in den singulären Punkten

$$1 - \zeta \cos w = 0 \tag{4}$$

sein muss, und, indem man w zwischen dieser Gleichung und (1) eliminirt, erhält man die Gleichung (12) des vorigen Paragraphen

$$1 \pm \sqrt{1 - \zeta^2} = \zeta e^{\pm\sqrt{1-\zeta^2} + \sqrt{-1}\, l}. \tag{5}$$

Diejenigen Werthe von l, die diese Gleichung befriedigen, geben die singulären Punkte der Function $\varphi(\zeta, l)$, als Function von l betrachtet.

Die obige Gleichung lässt sich aber unmittelbar nach l auflösen.

Wir setzen hier, wie schon erwähnt, voraus, dass ζ eine positive Grösse kleiner als die Einheit ist. Für den entsprechenden Werth von l erhält man aber im Allgemeinen einen imaginären Werth.

Wir setzen also

$$l = g + \sqrt{-1}\,h,$$

und erhalten aus (5)

$$(6)\qquad \begin{cases} e^{-h}\cos g = e^{\mp\sqrt{1-\zeta^2}}\,\dfrac{(1\pm\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta}, \\ e^{-h}\sin g = 0. \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen ist befriedigt, wenn g ein ganzes Vielfaches von π ist. Da indessen, nach den gemachten Voraussetzungen in Bezug auf ζ, die rechte Seite der ersten Gleichung stets positiv ist, so muss g ein *gerades* Vielfaches von π sein.

$$(7)\qquad g = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Die erste Gleichung (6) giebt dann

$$(7^*)\qquad h = \pm\sqrt{1-\zeta^2} + \log\frac{\zeta}{1\pm\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Man findet, dass die beiden Werthe von h, welche diese Gleichung befriedigen, sich nur hinsichtlich des Vorzeichens unterscheiden (Fig. 20).

Die singulären Punkte sind also symmetrisch zur Achse der g-Coordinaten geordnet, und liegen auf den zur h-Achse parallelen Linien, die durch die Punkte $2k\pi\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ gezogen werden. Sämmtliche singulären Punkte haben — vom Zeichen ab-

gesehen — die nämliche h-Coordinate, deren Werth aus (7*) erhalten wird.

Die Lage der singulären Punkte und die Bestimmung der Convergenzverhältnisse bei einer Entwickelung nach Potenzen der

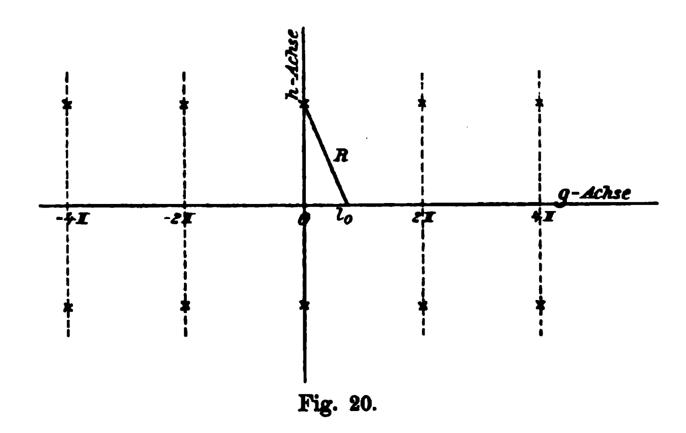


Fig. 20.

Zeit in der elliptischen Bewegung ist zuerst von F. R. Moulton gegeben worden (Astronomical Journal Vol. XXIII, 1903).

Will man die Coordinaten, bez. die excentrische Anomalie, nach Potenzen von $l - l_0$ entwickeln, so hat also, wenn man die Werthe von l_0 auf das Gebiet

$$-\pi \leqq l_0 \leqq \pi$$

beschränkt, was keine Einschränkung des Problems bedeutet, der Convergenzradius R_{l_0} den Werth

$$(8) \qquad R_{l_0} = \sqrt{l_0^2 + h^2},$$

wo h durch (7*) definirt ist.

Ist t_0 derjenige Werth von t, der dem Werthe $l = l_0$ entspricht, so ist der Convergenzradius R_{t_0} der Entwickelungen der Coordinaten der elliptischen Bewegung nach Potenzen von $t - t_0$ durch die Formel

$$(9) \qquad R_{t_0} = \frac{R_{l_0}}{n} = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 + \frac{h^2}{n^2}}$$

gegeben.

Die Grösse des Convergenzradius ist von l_0 und vom Werthe der Excentricität abhängig. In der Formel (9) geht ausserdem die mittlere Bewegung des Planeten ein.

Der Convergenzradius hat für eine gegebene Excentricität seinen grössten Werth im Aphel und erreicht im Perihel seinen Minimalwerth

$$\text{Min. } R_{l_0} = |h|.$$

Ist die Bahn kreisförmig, also $\zeta = 0$, so zeigt die Formel (7*), dass der Convergenzradius unendlich gross ist. Die Coordinaten werden in der That dann durch die Formeln

$$x = a \cos n(t - t_\pi), \qquad y = a \sin n(t - t_\pi)$$

gefunden, und sind also in diesem Falle holomorphe Functionen der Zeit.

Indem die Excentricität, für einen gegebenen Werth von l_0, von $\zeta = 0$ bis $\zeta = 1$ wächst, nimmt der Werth des Convergenzradius continuirlich ab, und nimmt für $\zeta = 1$ seinen Minimalwerth — $|l_0|$ — an.

Ich werde unten, nach Moulton, einige numerische Beispiele dieser Formel geben.

Die Frage nach der Entwickelung der Coordinaten in der *parabolischen* Bewegung nach Potenzen der Zeit ist zuerst von W. A. Hamilton (Astronomical Journal, Vol. XXIII, 1903) untersucht worden.

Wir haben in IV § 5 gefunden, dass die Coordinaten in der parabolischen Bewegung *ganze rationale* Functionen einer Hilfsgrösse w sind, welche mittelst der Formel

$$w + \frac{1}{3} w^3 = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} (t - t_\pi) \tag{10}$$

mit der Zeit verbunden ist. Setzt man

$$w = w(t),$$

so fallen also die Singularitäten dieser Function mit den Singularitäten der Coordinaten, als Functionen der Zeit betrachtet, zusammen.

Man findet aber für w die Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}}{1 + w^2},$$

und die einzigen Singularitäten der Function $w(t)$ findet man also, nach dem CAUCHY'schen Existenztheorem, für

$$w = \pm \sqrt{-1}.$$

Die entsprechenden singulären Werthe — t' — von t sind nach (10)

$$t' - t_\pi = \pm \frac{2\sqrt{2}\,q^{3/2}}{3\sqrt{\mu}} \sqrt{-1}. \tag{11}$$

Man hat also hier nur zwei singuläre Punkte. Die Entwickelung der Coordinaten in der parabolischen Bewegung nach Potenzen von $t - t_0$ convergirt innerhalb eines Kreises, dessen Mittelpunkt in t_0 liegt und dessen Peripherie durch t' geht. Der Convergenzradius ist also, für einen reellen Punkt t_0, durch die Formel

$$R = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 - (t' - t_\pi)^2} = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 + \frac{8\,q^3}{9\,\mu}} \tag{12}$$

gegeben.

Der Convergenzradius ist am kleinsten im Perihel, wo

$$R = \frac{2\sqrt{2}\,q^{3/2}}{3\sqrt{\mu}}$$

ist. Je grösser der Perihelabstand — q — ist, desto grösser ist R, das mit q, und auch mit $t_0 - t_\pi$, ins Unendliche wächst.

Was endlich die Entwickelung der Coordinaten in der *hyperbolischen* Bewegung nach Potenzen der Zeit betrifft, so ist diese Frage von MOULTON (l. c.) untersucht worden.

Die Untersuchung kann in ähnlicher Weise, wie in den früheren Fällen, geführt werden. Nach IV § 6 findet man, obgleich der Beweis daselbst nicht ausgeführt wurde, dass die Coordinaten in der hyperbolischen Bahn holomorphe Functionen einer Hilfsgrösse w sind, welche hier eine ähnliche Rolle wie die excentrische Anomalie in der elliptischen Bewegung spielt. Zwischen dieser Grösse und der Zeit besteht die Relation

$$\zeta \operatorname{sinhp} w - w = l, \tag{13}$$

wo ζ die Excentricität bezeichnet und $l = \frac{\sqrt{2h}}{a}(t - t_\varkappa) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_\varkappa)$ ist. Wird hier w als eine Function von l betrachtet, so fallen die Singularitäten dieser Functionen mit den Singularitäten der Coordinaten, als Functionen von l betrachtet, zusammen. Man erhält in früher auseinandergesetzter Weise diese singulären Werthe von l, indem man w zwischen (13) und der Gleichung

$$\zeta \operatorname{coshp} w - 1 = 0 \tag{14}$$

eliminirt.

Indem wir die Bedürfnisse der practischen Astronomie vor Augen haben, können wir uns hier auf solche Werthe von ζ einschränken, die *reell und grösser als die Einheit* sind.

Aus (14) folgen die Relationen

$$\operatorname{coshp} w = \frac{1}{\zeta}, \quad \operatorname{sinhp} w = \pm i \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta},$$

$$w = \log(\operatorname{coshp} w + \operatorname{sinhp} w) = \log \frac{1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}.$$

Setzt man weiter

$$l = g + hi,$$

so lautet die Gleichung (13)

$$\pm i\sqrt{\zeta^2 - 1} - \log\left(1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) + \log \zeta = g + hi.$$

Da weiter

$$\log(1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1}) = \log \zeta + i(2k\pi \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

ist, wo k Null oder eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet, und $\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2-1}$ denjenigen Bogen *zwischen* 0 *und* $\pi/2$ bedeutet, dessen Tangens gleich $\sqrt{\zeta^2-1}$ ist, so erhält man, indem man die reellen und die imaginären Theile trennt, für g und h die Werthe

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} g = 0, \\ \pm h = \sqrt{\zeta^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2-1} + 2k\pi \\ \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{array}\right.$$

Die singulären Punkte liegen also in diesem Falle sämmtlich auf der h-Achse, sind also rein imaginär. Sie sind symmetrisch auf beiden Seiten der reellen Achse gelegen, und wenn man setzt

$$(16)\qquad h_1 = \sqrt{\zeta^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2-1},$$

so werden alle singulären Punkte erhalten, wenn man, von den beiden Punkten h_1 und $-h_1$ aus, auf der imaginären Achse nach einander Stücke gleich 2π, 4π, 6π u. s. w. absetzt.

Der Convergenzradius R in der Entwickelung der Coordinaten in der hyperbolischen Bewegung ist also, für einen reellen Werth von l_0

$$(16^*)\qquad R = \sqrt{l_0^2 + h_0^2},$$

wo h_0 den kleinsten der aus der Formel (15) erhaltenen h-Werthe bezeichnet.

Man stösst indessen hier auf eine Schwierigkeit. Nimmt man für k irgend einen ganzen *negativen* Werth an, so giebt es immer einen positiven Werth für ζ, grösser als die Einheit, für welchen die rechte Seite von (15) verschwindet. Der Punkt $l = 0$ würde dann ein singulärer Punkt sein, was aber mit den gemachten Voraussetzungen nicht vereinbar ist. Es ist nämlich vorausgesetzt worden, dass, für $l = 0$, man $w = 0$ hat, und die Gleichung (14) zeigt, dass $w = 0$ *kein* singulärer Punkt ist. Dieser scheinbare Widerspruch findet seine Erklärung in dem Umstande, dass *nicht alle*

singulären Punkte der Function $\varphi(\zeta, l)$ auch Verzweigungspunkte desjenigen Zweiges dieser Function sind, der, für alle Werthe der Excentricität, für $l = 0$ den Werth Null hat. Offenbar kann *dieser* Zweig der Function $\varphi(\zeta, l)$, den wir allein hier betrachten, nicht für $l = 0$ einen Verzweigungspunkt besitzen, da angenommen worden ist, dass, für $l = 0$, $w = 0$ ist, und $w = 0$ kein Verzweigungspunkt der Function $\varphi(w, l)$ ist. Wir müssen also diejenigen Werthe von k in (15) ausschliessen, die für irgend einen positiven Werth von ζ (> 1) einen Werth $h = 0$ geben können. Mit anderen Worten, k ist entweder gleich Null, oder ist gleich einer *positiven* ganzen Zahl. Wir müssen also in (16*) $h_0 = h_1$ setzen und erhalten für den Convergenzradius den Werth

$$R = \sqrt{l_0^2 + h_1^2}, \tag{17}$$

wo

$$h_1 = \sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{17*}$$

ist, und $\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2 - 1}$ denjenigen zwischen 0 und $\pi/2$ gelegenen Bogen bezeichnet, dessen Tangens gleich $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ ist.

Die Formel (17*) zeigt, dass R, für ein gegebenes l_0, stetig mit der Excentricität — ζ — wächst. Ist $\zeta = 1$, so ist $R = |l_0|$. Geht ζ ins Unendliche, so wächst R gleichzeitig über alle Grenzen.

Will man den Convergenzradius — R_{t_0} — für die Entwickelung der Coordinaten in der hyperbolischen Bewegung nach Potenzen von $t - t_0$ berechnen, so erhält man

$$R_{t_0} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} R, \tag{18}$$

wo der Werth für R aus (17) einzusetzen ist.

Moulton hat einige interessante numerische Schlussfolgerungen aus diesen Gleichungen gezogen, die ich zum Teil wiedergeben will.

Schreibt man, der Symmetrie wegen, für die *parabolische* Bewegung

$$l = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} (t - t_\pi), \tag{19}$$

so dass die Gleichung (10) lautet

$$w + \tfrac{1}{3} w^3 = l, \tag{20}$$

so kann man den Ausdruck für den Convergenzradius sowohl für elliptische, wie parabolische oder hyperbolische Bahnen in der Form

$$R = \sqrt{l_0^2 + h_1^2}, \tag{21}$$

schreiben, wo

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{für } \zeta < 1 : h_1 & = & -\sqrt{1-\zeta^2} + \log \dfrac{\zeta}{1 - \sqrt{1-\zeta^2}}, \\ \;\;\text{„} \quad \zeta = 1 : h_1 & = & \tfrac{2}{3}, \\ \;\;\text{„} \quad \zeta > 1 : h_1 & = & \sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{array}\right. \tag{22}$$

ist, und es sich um eine Entwickelung nach Potenzen von $l - l_0$ handelt.

Für verschiedene Werthe von ζ erhält man hieraus folgende Werthe von h_1:

Tabelle III.

ζ	h_1	$h_1{}^0$	ζ	h_1
0.0	∞	∞		
0.1	1.998	109°.55	1.0	0.667
0.2	1.312	75 .17	1.05	0.010
0.3	0.920	52 .69	1.1	0.029
0.4	0.650	37 .23	1.2	0.077
0.5	0.451	25 .86	1.3	0.137
0.6	0.298	17 .06	2.0	0.685
0.7	0.181	10 .35	10.0	8.478
0.8	0.093	5 .35	100.0	98.42
0.9	0.031	1 .80	1000.0	998.4
0.95	0.011	0 .63		

Diese Tabelle giebt den Werth des Convergenzradius an für $l_0 = 0$, also für die Entwickelungen im Perihel nach Potenzen von l. In der dritten Columne habe ich die entsprechenden Werthe von h_1, in Graden ausgedrückt, eingeführt. Man findet hieraus, dass, wenn die Excentricität gleich 0.1 ist, die Entwickelung der Coordinaten nach Potenzen der mittleren Anomalie bis $l = 109^0.55$ convergirt u. s. w. Die Entwickelungen nach Potenzen von l (also im Perihel) bei der parabolischen Bewegung convergiren für $l < 0.667$, was einem Werth von 62^0 für die Länge entspricht.

Die Convergenzradien für die Entwickelungen nach Potenzen der Zeit lassen sich mittelst der Formeln (9) und (18) leicht berechnen, wenn der Werth der mittleren Bewegung bez. der halben grossen Achse in der Bahn bekannt ist. Indem er $a = 2.65$ setzt, berechnet Moulton folgende Tabelle, die für die Anwendung dieser Untersuchungen auf die Theorie der kleinen Planeten von Interesse ist.

Tabelle IV.

R_{l_0} *in Tagen für* $a = 2.65$.

ζ	$l_0 = 0$	$l_0 = 60^0$	$l_0 = 120^0$	$l_0 = 180^0$
0.0	∞	∞	∞	∞
0.1	501.2	553.0	726.0	933.7
0.2	329.3	421.1	620.0	854.0
0.3	230.7	349.6	573.7	821.0
0.4	163.1	302.2	550.1	805.1
0.5	113.0	285.9	537.3	796.0
0.6	74.9	273.1	530.5	791.5
0.7	45.5	266.5	527.3	789.3
0.8	23.4	263.7	525.8	788.4
0.9	7.7	262.7	525.3	788.0
0.95	2.8	262.6	525.2	788.0

Die Umlaufszeit eines Asteroiden in diesem Abstande ist 1575 Tage. Die Entwickelungen der Coordinaten nach Potenzen der Zeit sind also im Aphel für mehr als einen halben Umlauf convergent. Im Perihel nimmt die Grösse des Convergenzradius mit wachsendem Werthe der Excentricität rasch ab.

Die nachfolgende, ebenfalls von MOULTON berechnete Tabelle giebt eine gute Übersicht über die Werthe des Convergenzradius bei verschiedenen Bahnformen.

Tabelle V.

R_{t_0} *in Tagen für* $t_0 = t_\pi$, $q = 1$.

ζ	R_{t_0}	ζ	R_{t_0}
0.0	∞	1.0	54.8
0.1	186.1	1.05	53.8
0.2	106.7	1.1	52.3
0.3	91.3	1.2	50.1
0.4	81.3	1.3	48.5
0.5	74.1	2.0	39.9
0.6	68.6	5.0	25.7
0.7	64.1	10.0	18.3
0.8	60.5	100.0	5.8
0.9	57.4	1000.0	1.8
0.95	55.6		

Hier ist in allen Fällen der Perihelabstand unveränderlich gleich der Einheit angenommen.

Die Wichtigkeit dieser Zahlen für das Bahnbestimmungsproblem liegt auf der Hand.[1]

[1] Vergleiche in Bezug hierauf die citirten Aufsätze von HAMILTON und MOULTON.

Zuletzt werde ich die Entwickelungen im Zwei-Körperproblem für den Fall betrachten, dass die Kraft repulsiv ist, und es sich um die Entwickelungen der Coordinaten nach Potenzen der Zeit handelt. In IV § 7 werden die Coordinaten in diesem Fall durch eine Hilfsgrösse w ausgedrückt, welche durch die Relationen

$$(23) \qquad w + \zeta \operatorname{sinhp} w = l,$$

$$(23^*) \qquad l = \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}}(t - t_\pi)$$

mit der Zeit verbunden ist. Hier soll, für $l = 0$, w gleich Null sein.

Die singulären Werthe von l werden also erhalten, indem man w zwischen (23) und der Gleichung

$$(24) \qquad 1 + \zeta \operatorname{coshp} w = 0$$

eliminirt. Hier soll ζ als eine positive Zahl grösser als die Einheit angenommen werden.

Aus (24) erhält man

$$\operatorname{coshp} w = -\frac{1}{\zeta}, \qquad \operatorname{sinhp} w = \pm i\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta},$$

$$w = \log \frac{-1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}.$$

Setzt man

$$\log(-1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1}) = \alpha + \beta i,$$

so erhält man zur Bestimmung von α und β die Gleichungen

$$e^\alpha \cos\beta = -1,$$

$$e^\alpha \sin\beta = \pm\sqrt{\zeta^2 - 1},$$

und also

$$\alpha = \log\zeta,$$

$$\beta = \mp \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2 - 1} + m\pi,$$

wo m eine ganze Zahl oder Null bezeichnet. Man findet aber aus der Gleichung

$$e^{\alpha}\cos\beta = -1,$$

dass $\cos\beta$ negativ und also m eine *ungerade* Zahl sein muss. Es ist also

$$\log(-1 \pm i\sqrt{\zeta^2-1}) = \log\zeta + i\left(\mp \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2-1} + (2k+1)\pi\right),$$

wo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ist.

Wird dieser Ausdruck in (23) eingesetzt, und schreibt man

$$l = g + hi, \tag{25}$$

so wird

$$g = 0,$$

$$h = \mp \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2-1} + (2k+1)\pi \pm \sqrt{\zeta^2-1}.$$

Wie für die hyperbolische Bewegung, bei attrahirenden Massen, so müssen auch hier negative Werthe von k ausgeschlossen werden, weil man sonst für $l = 0$ einen singulären Punkt erhalten würde. Setzt man

$$h_1 = \sqrt{\zeta^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta^2-1},$$

so ist also die Lage der singulären Punkte durch die Formeln

$$\left\{\begin{aligned} g &= 0, \\ \pm h &= h_1 + (2k+1)\pi \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{26}$$

gegeben.

Der Convergenzradius — R — hat den Werth

$$R = \sqrt{l_0^2 + (h_1+\pi)^2}. \tag{27}$$

Der Werth von h_1 fällt mit dem Werth (16) für h_1 in der hyperbolischen Bewegung bei attrahirenden Massen zusammen.

Die Grösse des Convergenzradius wächst mit der Excentricität. Im Perihel ist

$$R_{\text{perihel}} = h_1 + \pi. \tag{28}$$

Ist die Excentricität gleich Eins, so ist $h_1 = 0$, und also $R = \pi$. Es kann befremdend erscheinen, dass man hier einen endlichen Werth für den Convergenzradius für $\zeta = 1$ erhält, wogegen bei attrahirenden Massen für $\zeta = 1$ der Werth des Convergenzradius gleich Null ist. Dies findet seine natürliche Erklärung darin, dass für $\zeta = 1$ bei *anziehenden* Massen die Bahn eine gerade Linie ist, die im Centralkörper ihren Endpunkt hat. Es findet also im „Perihel" ein Zusammenstoss der beiden Massen statt, und es kann dann von keiner Entwickelung nach Potenzen der Zeit die Rede sein. Wir haben dagegen in IV § 3 gefunden, dass bei einem Zusammenstoss die Coordinaten nach Potenzen von

$$(t - t_0)^{2/3}$$

entwickelt werden können.[1]

Bei abstossenden Massen liegt die Sache anders. Für $\zeta = 1$ ist zwar die Bahn auch geradlinig, die Körper nähern sich aber bis zu einem gewissen endlichen Abstand, um dann dieselbe Linie rückwärts zu beschreiben. Die Formel (28) zeigt, dass eine Entwickelung der relativen Coordinaten der Körper im Perihel nach Potenzen von l, d. h. von $\frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}}(t - t_\pi)$, für $l < \pi$ convergent bleibt.

Der Werth des Convergenzradius bei einer Entwickelung der Coordinaten nach Potenzen von $t - t_0$ ist nach (23*) und (27)

$$R_{t_0} = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 + \frac{a^3}{\mu_1}(h_1 + \pi)^2}, \tag{29}$$

und hängt also von a und vom Werthe der Repulsionsconstante ab.

---

[1] Der Convergenzradius dieser Entwickelung ist nach (18) und (15) gleich $\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\, 2\pi$.

In der Bessel-Bredichin'schen Theorie der Cometenschweife bedient man sich der Reihen, die nach Potenzen der Zeit fortschreiten. Der Convergenzbereich dieser Reihen kann aus (29) berechnet werden.

Nachtrag. Nachdem das Obige geschrieben wurde, habe ich von Herrn Professor A. Wiman in Upsala, mit dem ich diesen Sommer Gelegenheit hatte über diese Convergenzfrage zu sprechen, folgende briefliche Mittheilung erhalten, die ich mit der Erlaubniss des Verfassers hier abdrucke. Seine Auseinandersetzungen beziehen sich auf die S. 280 erwähnte Schwierigkeit bei der Bestimmung des Werthes des Convergenzradius in der Entwickelung der Coordinaten in der hyperbolischen Bewegung nach Potenzen der Zeit. Professor Wiman schreibt:

„Es handelt sich um die Bestimmung des Convergenzradius derjenigen Potenzreihe $w = f(l)$, welche durch die Gleichung

$$\zeta \sinh\mathrm{p}\, w - w - l = 0 \tag{1}$$

definirt wird, wo, für $l = 0$, $w = 0$ sein soll. Die Grösse ζ ist ein Parameter, der positiv und > 1 ist.

Die singulären Punkte der verschiedenen Zweige, welche der Gleichung (1) genügen, müssen die Bedingung

$$\zeta \cosh\mathrm{p}\, w - 1 = 0 \tag{2}$$

erfüllen, und man bekommt also

$$l = \pm\, i\left[\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2\, k\, \pi\right], \tag{3}$$

wo k eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet.

An einer solchen singulären Stelle vertauschen sich im Allgemeinen zwei w-Zweige. Man findet aber, dass gewisse ζ-Werthe von besonderer Bedeutung sind, diejenigen nämlich, für welche die Gleichung

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2\, k\, \pi = 0 \tag{4}$$

erfüllt ist, wobei k einen *negativen* Werth haben muss. Für solche ζ-Werthe fallen *zwei* singuläre l-Werthe zusammen. Dies bedeutet, daß in diesem Falle *zwei Paar* w-Zweige um den singulären Punkt permutirt werden. Ein Zweig des einen Paares wird indessen hierbei nicht in einen Zweig des anderen Paares übergehen.

Damit mehr als zwei Zweige in einem singulären Punkt in Zusammenhang treten sollen, ist erforderlich, dass auch

(5) $$\zeta \operatorname{sinhp} w = 0,$$

welche Gleichung erfordert, daß $\zeta = 1$ ist. Für die singulären Punkte ist hier $l = 2k\pi i$. An einer solchen Stelle hängen drei w-Zweige cyclisch zusammen. Für $k = 0$ werden diese Zweige durch die Gleichung

$$w^3 + \ldots = 6l$$

gegeben. Unter diesen giebt ein Zweig, bei wachsendem Werth von ζ, für $l = 0$, $w = 0$, also den Ausgangszweig.

Wächst nun ζ und wird > 1, so wird dieser singuläre Punkt in zwei Punkte aufgelöst, für welche

$$l = \pm i\left(\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

ist. Der Ausgangszweig hängt in diesen Punkten mit zwei verschiedenen Zweigen zusammen. Es ist aber nicht möglich, einen singulären Punkt des Ausgangszweiges zu erreichen, für welche $|l|$ kleiner als $\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}$ ist. Der fragliche Zweig muss ja, wenn (4) erfüllt ist, mit genau denselben Functionszweigen in den singulären Punkten verbunden sein, wie für benachbarte ζ-Werthe. Der Convergenzradius der betreffenden Potenzreihe $w = f(l)$ ist also

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}\,.\text{“}$$

§ 3. Die Hill'sche Grenzcurve.

Die Convergenzuntersuchungen in der Mechanik des Himmels bezwecken vor allen Dingen die Grenzen, innerhalb welcher die relativen Coordinaten der Planeten sich verändern können, zu bestimmen. Es lässt sich aber indessen denken, dass man diese Grenzen finden kann, ohne für unbeschränkte Zeit gültige Reihen für die Coordinaten zu besitzen, und in der That sind verschiedene Versuche gemacht, solche Grenzen in indirecter Weise aufzusuchen. Von diesen Versuchen hat indessen, so viel ich weiss, nur einer sich als erfolgreich erwiesen — wenigstens als allgemeines Princip betrachtet — nämlich derjenige, der in der in § 3 IX erwähnten Hill'schen Grenzcurve seinen Ausgangspunkt hat. Mit Hilfe dieser Grenzcurve wurde es Hill möglich, das erste Mal in der Geschichte der himmlischen Mechanik, einen strengen Stabilitätsbeweis für eine Classe Bewegungen im Drei-Körperproblem zu finden, indem er bewies, dass der Mond der Erde sich niemals mehr als bis zum Vierfachen seines jetzigen Abstandes von der Erde vom Hauptplaneten entfernen kann. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass nur

die Anziehung der Erde und der Sonne auf den Mond in Betracht gezogen wird, und ausserdem musste HILL die Beschränkung machen, dass die Bahn der Erde um die Sonne genau kreisförmig sei.

Die HILL'sche Grenzcurve hat in den letzten Jahrzehnten eine mehrfache Anwendung gefunden. Die allgemeinsten Untersuchungen über dieselbe rührt von BOHLIN her („Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme", Acta Mathematica. 10. 1887), der auch ihre Bedeutung für das allgemeine Drei-Körperproblem untersucht. Es zeigt sich indessen, dass man hier aus einer Discussion der Grenzcurve keine allgemeinen Schlüsse über die Maximal- oder Minimalwerthe der gegenseitigen Abstände ziehen kann, nur lässt sich ziemlich unmittelbar schliessen, dass nicht *alle* Abstände gleichzeitig unendlich gross sein können. Zieht man das allgemeine Problem der n-Körper in Betracht, ist nämlich nach V § 1 das Integral der lebendigen Kraft von der Form

$$\frac{1}{2}\sum m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum\frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} + h, \tag{1}$$

so dass die Gleichung für die HILL'sche Grenzcurve (hier würde man wohl besser von einer Grenzfläche sprechen) lautet:

$$0 = \sum\frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} + h, \tag{1*}$$

wo r_{ij} den Abstand zwischen der Masse m_i und der Masse m_j bezeichnet. Wir nehmen an, dass die Constante h der lebendigen Kraft, wie es in unserem Planetensystem der Fall ist, negativ ist. Die rechte Seite von (1) muss immer positiv sein, und hieraus folgt, dass die Abstände r_{ij} nicht alle gleichzeitig unendlich gross sein können. Die Mitglieder unseres Planetensystems können sich also nicht im Laufe der Zeit alle unendlich weit von einander entfernen.

Im *asteroidischen Drei-Körperproblem* giebt indessen die HILL'sche Grenzcurve bessere Aufschlüsse über die Natur der Bewegung. BOHLIN zeigt, wie bei gewissen Werthen der JACOBI'schen Constante die Bahncurve des Asteroides innerhalb einer geschlossenen Curve liegt. Seine Untersuchungen wurden von DARWIN in eleganter

Weise weitergeführt, und wir haben in IX § 3 die wichtigsten Ergebnisse dieser Discussion wiedergegeben. Hier werde ich die Folgerungen aus diesem Principe in Bezug auf die Bewegung der kleinen Planeten in unserem Planetensysteme untersuchen.

Es sei zuerst *Jupiter* der störende Planet, der sich in einem Kreise um die Sonne bewegt. Das JACOBI'sche Integral lautet

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C, \tag{2}$$

wo

$$2\Omega = \varrho_1^2 + \frac{2}{\varrho_1} + \mu\left(\varrho_2^2 + \frac{2}{\varrho_2}\right) \tag{2*}$$

ist, und $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Asteroiden im *beweglichen* Coordinatensysteme bezeichnet.

Die Gleichung der Grenzcurve ist

$$2\Omega - C = 0. \tag{3}$$

Ist C hinreichend gross, besteht die Grenzcurve aus geschlossenen Zweigen und der Asteroid muss, wenn er sich beim Anfang der Bewegung innerhalb eines geschlossenen Zweiges befindet, immer da bleiben. Bei einem Werth $C = C_1$ geht die Grenzcurve in eine Lemniscaten-ähnliche Figur über, die im Librationspunkte L_1 einen Doppelpunkt besitzt. In IX § 1 haben wir gefunden, dass dieser Librationspunkt im Abstande 0.0668 vom *Jupiter* liegt. Der entsprechende Werth C_1 von C wird demnach aus (3) erhalten, indem man $\varrho_1 = 0.9332$, $\varrho_2 = 0.0668$, $\mu = 1:1047$ setzt. Man erhält

$$C_1 = 3.0426.$$

Wir können also den Satz aufstellen: *Wenn für einen kleinen Planeten die* JACOBI'*sche Constante grösser als 3.0426 ist, so kann der Planet sich nicht ausserhalb einer um die Sonne geschlossenen Curve bewegen.*

Um die Werthe der JACOBI'schen Constante für die kleinen Planeten zu erhalten, kann man aus ihren bekannten Elementen für eine gewisse Zeit die Werthe von ϱ_1, ϱ_2 und $\frac{ds}{dt}$ berechnen, und erhält dann den entsprechenden Werth von C nach (2) aus der Formel

$$C = \varrho_1{}^2 + \frac{2}{\varrho_1} + \mu\left(\varrho_2{}^2 + \frac{2}{\varrho_2}\right) - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{4}$$

Ich werde einige Werthe von C unter der Voraussetzung berechnen, dass die Bahn für eine gewisse Zeit kreisförmig ist. Die *absolute* Geschwindigkeit des Asteroiden ist dann gleich $1:\sqrt{\varrho_1}$ und die Geschwindigkeit *Jupiters* ist $\sqrt{1+\mu}$, so dass

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} - \varrho_1\sqrt{1+\mu} \tag{5}$$

ist.

Setzt man diesen Werth in (4) ein, so findet man, dass C für kleine ϱ_1 einen grossen positiven Werth hat; wie man sich von der Sonne entfernt, nimmt die Jacobi'sche Constante an Grösse ab, bis sie zwischen $\varrho_1 = 0$ und $\varrho_1 = 1$ ein Minimum erreicht, um dann für $\varrho_1 = 1$ wieder ins Unendliche zu wachsen.

Aus (4) und (5) habe ich folgende Werthe der Jacobi'schen Constante abgeleitet.

Tabelle VI.

Werthe der Jacobischen Constante im Planetensystem.

ϱ_1	$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$	C
0.1	9.3778	10.6356
0.2	4.1452	5.8978
0.3	2.3274	4.4325
0.4	1.3945	3.7690
0.5	0.8351	3.4190
0.6	0.4768	3.2214
0.7	0.2448	3.1089
0.8	0.1010	3.0486
0.9	0.0236	3.0277
0.95		3.0403
0.98		3.1170

Diese Werthe sind für solche Werthe von ϱ_1, die zwischen 0.6 oder 1.0 liegen, in der Fig. 21 graphisch dargestellt.

Zieht man durch die Ordinate $C = 3.0426$ eine zur Abscissenachse parallele Linie, so schneidet sie von der Curve ein Stück ab, das solchen C-Werthen entspricht, für welche die Grenzcurve *nicht*

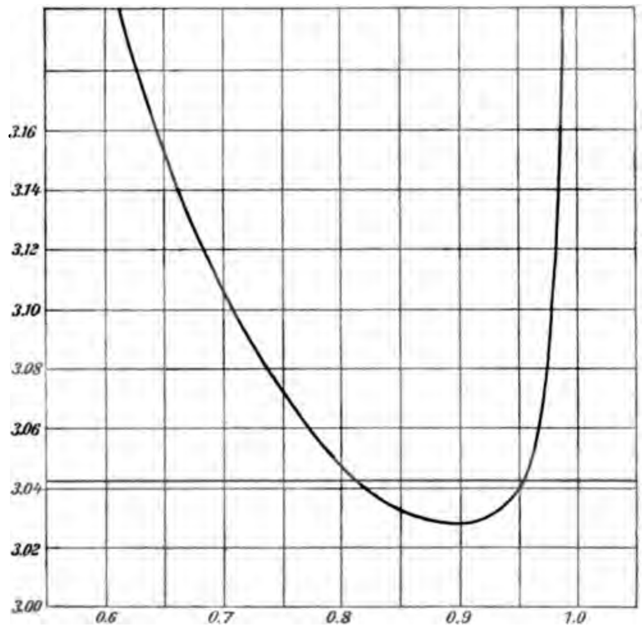


Fig. 21.

geschlossen ist. Man findet in dieser Weise aus der Figur, dass solche Asteroiden, welche eine Kreisbahn beschreiben, deren halbe grosse Achse einen Werth zwischen 0.815 und 0.96 hat (die halbe grosse Achse der Jupiterbahn als Einheit genommen), keine geschlossene Grenzcurve besitzen. Man ist deswegen berechtigt, solche Bahnen als *instabil* zu betrachten. Wird die halbe grosse Achse der Jupiterbahn gleich 5.201 astronomischen Einheiten gesetzt, so sind also die genannten Grenzen für die Instabilität

$$a = 4.24 \quad \text{und} \quad a = 5.00 \, .$$

Die äussersten Asteroiden, die im Anhang zum ersten Bande aufgeführt sind, und ihre mittleren Entfernungen (a) von der Sonne sind

	a
(279) Thule	4.263
1893 X	4.125
(361)	3.962
(153) Hilda	3.962

Der äusserste Asteroid (279) Thule liegt also nahe auf der Grenze zum instabilen Bereich. *Alle übrigen bekannten Asteroiden besitzen eine geschlossene Grenzcurve*, insofern nur die Jupiterstörungen in Betracht gezogen werden, wenigstens wenn vom Einfluss der Werthe der Excentricitäten und der Neigungen auf die Stabilitätsfrage abgesehen wird.

Eine Untersuchung über die Grenzcurve der kleinen Planeten wurde zuerst von Kobb ausgeführt (Bulletin Astr. 1901). Er findet, indem er auf die Excentricität der Bahn Rücksicht nimmt, dass der Asteroid (279) Thule ausserhalb der Stabilitätsgrenze liegt und um die Sonne keine geschlossene Grenzcurve besitzt.

Hat die Bahn des kleinen Körpers einen mittleren Abstand grösser als 0.96, wird die entsprechende Grenzcurve um *Jupiter* geschlossen, und der Körper wird dann nicht zum Asteroidenringe gehören.

Es kann kein Zufall sein, dass, von einem einzigen Asteroiden vielleicht abgesehen, sämmtliche bekannte kleine Planeten innerhalb des in Bezug auf die Jupiterstörungen stabilen Gebietes gelegen sind. Der Werth $a = 4.24$ bildet eine natürliche *obere* Grenze für die halben grossen Achsen der Bahnen der kleinen Planeten, ebensowohl wie der in VII § 12 gefundene singuläre Punkt $a = 2.05$ eine *untere* Grenze für den Asteroidenring bildet.

Wir haben hier nur den Einfluss *Jupiters* auf die kleinen Planeten berücksichtigt. Von den übrigen Planeten im Planetensystem ist die Einwirkung vom *Mars* auf die Asteroiden indessen nicht zu vernachlässigen. Giebt die Grenzcurve hier eine Auskunft über die Natur der Bewegung?

Für grosse Werthe von C — und bei allen bekannten Asteroiden hat C einen Werth, der als gross betrachtet werden kann —

besteht die Grenzcurve aus einem kleinen, nahe kreisförmigen Zweig um *Mars*, einem ebenfalls nahe kreisförmigen Zweig um die Sonne mit einem Radius, der etwas kleiner als die halbe grosse Achse der Marsbahn ist, und ausserdem aus einem dritten Zweig, den man auch als nahe kreisförmig betrachten kann, dessen Mittelpunkt in der Sonne liegt und der einen Radius etwas *grösser* als die halbe grosse Achse der Marsbahn hat. Der kleine Planet muss sich *ausserhalb* des letztgenannten Kreises bewegen. Den Radius dieses Kreises kann man als ein Minimum für den Abstand des kleinen Planeten von der Sonne betrachten.

Bei der Berechnung des Werthes dieses Radius kann man die mit der kleinen Marsmasse multiplicirten Glieder in (2*), (4) und (5) vernachlässigen. Wird die augenblickliche Bahn eines Asteroiden als kreisförmig betrachtet, mit dem mittleren Abstande a von der Sonne, und der Werth des betreffenden Radius mit x bezeichnet, so leitet man aus den genannten Formeln leicht folgende Gleichung zwischen a und x ab:

$$x^2 + \frac{2}{x} = \frac{1}{a} + 2\sqrt{a}, \tag{6}$$

eine Gleichung, die eine Wurzel zwischen Null und der Einheit und eine Wurzel zwischen der Einheit und $+\infty$ hat. Die letztere Wurzel entspricht dem gesuchten Minimalwerth von a.

Ist z. B. $a = 1.5$ (es ist zu bemerken, dass alle Abstände in dem mittleren Abstande des Hauptplaneten — hier *Mars* — von der Sonne als Einheit auszudrücken sind), so bekommt man $x = 1.21$; ist $a = 2.0$, so ist $x = 1.36$.

Man kann dieselbe Formel (6) benutzen, um den Maximalwerth des mittleren Abstandes des Asteroiden zu berechnen, wenn die Störungen des Asteroiden vom *Jupiter* in Betracht gezogen werden. Hier handelt es sich um diejenige Wurzel, die kleiner als die Einheit ist.

Werden die Werthe der Maximal- und Minimalabstände in gewöhnlichen astronomischen Einheiten ausgedrückt, so erhalten wir somit aus (6)

für $a = 2.28$: Minimalabstand $= 1.82$, Maximalabstand $= 3.28$,

„ $a = 3.04$: „ $= 2.08$, „ $= 3.90$.

Der kleine Planet (40) Harmonia, der sich gegenwärtig in einer nahe kreisförmigen Bahn mit der halben grossen Achse nahe gleich 2.28 bewegt, würde also niemals der Sonne näher kommen können als auf den Abstand 1.82 und sich niemals weiter von der Sonne entfernen können, als auf den Abstand 3.28.

Wir sind indessen dabei von der Voraussetzung ausgegangen, dass die beiden störenden Planeten unabhängig von einander ihre Grenzcurven für den kleinen Planeten bestimmen. Inwiefern die so bestimmten Maximal- und Minimalabstände des kleinen Planeten als wirkliche Annäherung zur Wahrheit betrachtet werden können, muss dahingestellt werden. In Bezug auf den Maximalabstand wird zwar die kleine Marsmasse kaum eine merkliche Correction geben können. Ob aber die durch *Mars*, wenn dieser Planet der einzige „grosse" Planet im Planetensystem wäre, bestimmte innere Grenzcurve für die Asteroiden auch thatsächlich vorhanden ist, kann hieraus nicht geschlossen werden.

Zuletzt will ich bemerken, dass das Jacobi'sche Integral (2) erlaubt, weitere Schlüsse über die Stabilitätsverhältnisse zu ziehen, als nur mit Hilfe der Grenzcurve geschehen kann. Die diesbezüglichen Betrachtungen können indessen besser in einem anderen Zusammenhang als hier auseinandergesetzt werden.

§ 4. Convergenz der Entwickelungen nach Potenzen der störenden Massen.

Die Störungstheorie, deren Methoden seit Laplace und Lagrange bis in unsere Tage die Untersuchungen in der Mechanik des Himmels beherrscht haben, geht von einer Entwickelung der Coordinaten nach Potenzen der kleinen Planetenmassen aus. Wie verhält es sich mit der Convergenz dieser Entwickelungen?

Es stellte sich bald heraus, dass das Vorhandensein der secularen Störungen für die Convergenz der Reihen, wenigstens für längere Zeiten, hinderlich sei. Zwar könnten Laplace und Lagrange den Beweis geben (man vergleiche den siebenten Abschnitt), dass in den Störungen der *ersten* Ordnung keine secularen Glieder in den

Ausdrücken für die halbe grosse Achse, die Excentricität und für die Neigung der Bahn vorkamen. Wie es sich aber mit den Coefficienten der höheren Potenzen der Massen in dieser Beziehung verhält, wussten sie nicht und dies muss, in der Hauptsache, bis jetzt als eine unbekannte Sache betrachtet werden.

Eine andere Schwierigkeit für die Convergenzuntersuchung gaben die „kleinen Divisoren". Vom Standpunkte der Störungstheorie betrachtet, könnte ein vor der Integration unbedeutendes oder gar verschwindend kleines Glied zu Störungen von beliebig hohem Betrage Veranlassung geben, wenn nur die mittleren Bewegungen der Planeten mit einander nahe commensurabel sind.

Andererseits zeigt die numerische Anwendung der Störungstheorie auf das Planetensystem eine gute Uebereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungen. Man kann hieraus indirect schliessen, dass eine Convergenz, irgend welcher Art, wirklich vorhanden sein muss.

In Anbetracht der genannten Schwierigkeiten könnte man indessen darauf gefasst sein, dass die Reihen wenigstens nicht für beliebig hohe Werthe der Zeit convergent blieben. Sind aber die Reihen überhaupt für einen *beschränkten* Zeitraum convergent? Oder gehören sie zu den „halbconvergenten" Reihen — von der Art der Stirling'schen Reihe, die wir im achten Abschnitt betrachtet haben —, die einen genäherten Ausdruck für die Functionen geben, wenn man einige Glieder im Anfange der Reihe mitnimmt, deren Glieder aber zuletzt ins Unendliche wachsen?

Die Antwort auf diese Fragen ist für die Anwendungen der Störungstheorie auf die Berechnung der Bewegung der Himmelskörper von der grössten Bedeutung. Sind nämlich die Reihen nur *halbconvergent*, so kann die Berechnung der Störungen *höherer* Ordnung unter Umständen als eine unnütze oder gar schädliche Arbeit betrachtet werden, und man thäte dann besser, die sehr zeitraubende Berechnung der Störungen höherer Ordnung zu unterlassen, und sich mit den Störungen der ersten Ordnung zu begnügen, in welchem Falle man natürlich genöthigt wäre, diese Berechnung für genügend nahegelegene Epochen neu auszuführen.

Es sei x irgend eine Coordinate,[1] für welche man durch Integration der Differentialgleichungen der Bewegung den Ausdruck

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots \tag{1}$$

erhalten hat. Die Grösse μ ist ein Repräsentant der störenden Planetmassen, so dass, wenn diese mit $m_1, m_2, \dots, m_s$ bezeichnet werden, man

$$m_1 = \alpha_1 \mu, \quad m_2 = \alpha_2 \mu, \dots, \quad m_s = \alpha_s \mu \tag{2}$$

hat, wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ als endliche Zahlen zu betrachten sind, von welchen eine beliebig gewählt werden kann.

In (1) nennt man x_1 die Störungen *erster* Ordnung, x_2 die Störungen der *zweiten* Ordnung u. s. w.

Bei der Behandlung der Frage nach der Convergenz der Reihe (1) sind zwei Probleme zu unterscheiden. Die Störungen der verschiedenen Ordnungen werden nicht durch geschlossene Ausdrücke gegeben, sondern in der Form unendlicher Reihen. Das eine Problem ist, die Convergenz dieser Reihen zu untersuchen. Das zweite Problem hat zum Gegenstand, die Convergenz der von den Störungen verschiedener Ordnung gebildeten Reihe (1) zu untersuchen.

Mit dieser letzteren Frage wollen wir uns in diesem Paragraphen beschäftigen. Um uns vom erstgenannten Problem unabhängig zu machen, wollen wir die Aufgabe so formuliren: lassen sich die Coordinaten im Drei-Körperproblem (bez. Problem der n-Körper) nach Potenzen der kleinen Massen entwickeln, und, wenn dem so ist, welcher Art ist die Convergenz dieser Reihen?

Die Antwort auf diese Frage ist vom Verfasser im *Bulletin Astr.* 1902 gegeben.

Wir bedienen uns der DELAUNAY'schen Elemente des fünften Abschnittes (§ 5). Wenn ausser der Sonne s Planeten vorhanden sind, so lauten die Differentialgleichungen

[1] Unter Coordinate verstehe ich hier eine beliebige abhängige Veränderliche, es seien rechtwinklige Coordinaten, polare Coordinaten, osculirende Elemente o. d.

$$
(3) \quad \begin{cases}
\dfrac{dL_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\beta_i \partial l_i}, & \dfrac{dl_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\beta_i \partial L_i}, \\[2ex]
\dfrac{dG_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\beta_i \partial g_i}, & \dfrac{dg_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\beta_i \partial G_i}, \\[2ex]
\dfrac{dH_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\beta_i \partial h_i}, & \dfrac{dh_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\beta_i \partial H_i}, \\[2ex]
(i = 1, 2, \ldots, s),
\end{cases}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
L_i &= \sqrt{a_i}, & l_i &= n_i t + c_i, \\
G_i &= \sqrt{a_i(1-e_i^2)}, & g_i &= \pi_i - \Omega_i, \\
H_i &= \sqrt{a_i(1-e_i^2)}\cos J_i, & h_i &= \Omega_i.
\end{aligned}
$$

Die Störungsfunction F lässt sich nach Potenzen der kleinen Massen — oder nach μ — entwickeln, und man hat

$$
(3^*) \qquad F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots
$$

Die Erweiterung Poincaré's des Cauchy'schen Existenztheorems (IX § 7) lehrt, dass das Integral der Gleichungen (3) nach Potenzen von μ entwickelt werden kann, wenn μ hinreichend klein gewählt wird, für alle Werthe von t, für welche die Entwickelung (3*) gültig ist, mit einer Beschränkung, die wir in IX § 7 formulirt haben für den Fall, dass die Entwickelung (3*) für *alle* Zeit convergirt.

Damit dies gilt, muss aber eine Bedingung erfüllt werden, die wir jetzt untersuchen wollen. Die Lösung der Gleichungen (3) sei:

$$
\begin{aligned}
L_i &= L_i(t, \mu), & l_i &= l_i(t, \mu), \\
G_i &= G_i(t, \mu), & g_i &= g_i(t, \mu), \\
H_i &= H_i(t, \mu), & h_i &= h_i(t, \mu),
\end{aligned}
$$

wo die Functionen $L_i(t, \mu)$, $G_i(t, \mu)$ u. s. w nach positiven Potenzen von μ entwickelt sind.

Für $\mu = 0$ haben diese Functionen die Werthe

$$(4) \quad \begin{cases} L_i(t, 0), & G_i(t, 0), & H_i(t, 0), \\ l_i(t, 0), & g_i(t, 0), & h_i(t, 0), \end{cases}$$

und nach IX § 7 ist erforderlich, dass F und die Ableitungen dieser Function nach L, G u. s. w. nach Potenzen von $L_i - L_i(t, 0)$, $G_i - G_i(t, 0)$ u. s. w. entwickelt werden können.

Die Functionen (4) reduciren sich aber im vorliegenden Falle auf Constanten, mit Ausnahme von $l_i(t, 0)$, welche Function den Werth

$$l_i(t, 0) = n_i t + c_i$$

hat. Die Grössen $L_i(t, 0)$, $G_i(t, 0)$ u. s. w. sind in der That nichts anderes, als die zur Zeit $t = 0$ osculirenden Elemente der Planeten.

Die Störungsfunction und ihre Ableitungen nach den Elementen sind aber analytische Functionen der Elemente, die für beliebige Werthe

$$(5) \quad \begin{cases} L_i^{(0)}, & G_i^{(0)}, & H_i^{(0)}, \\ l_i^{(0)}, & g_i^{(0)}, & h_i^{(0)} \end{cases}$$

nach positiven Potenzen von $L_i - L_i^{(0)}$, $G_i - G_i^{(0)}$ u. s. w. — unter Voraussetzung, dass diese Grössen hinreichend klein gewählt werden — entwickelt werden können, welche Reihen für alle reellen Werthe der Zeit convergiren, wenn nur die durch (5) bestimmten Kegelschnitte sich nicht gegenseitig schneiden.

Es genügt, um dies zu beweisen, das folgende einfache Problem zu betrachten. Es sei die Aufgabe gestellt, die Function

$$\varphi(l) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l}},$$

wo $\alpha < 1$ ist, im Punkte $l = l_0$ nach Potenzen von $l - l_0$ zu entwickeln. Es wird behauptet, dass diese Entwickelung in einer

endlichen Umgebung von $l = l_0$ convergirt und zwar für alle reellen Werthe von l_0. Setze

$$l = l_0 + \xi,$$

dann ist

$$\cos l = \cos l_0 \cos \xi - \sin l_0 \sin \xi$$
$$= \cos l_0 - 2 \cos l_0 \sin^2 \tfrac{1}{2} \xi - \sin l_0 \sin \xi,$$

und also

$$\varphi(l) = [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l_0]^{-1/2} \left(1 + \frac{f}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l_0}\right)^{-1/2}, \tag{6}$$

wo

$$f = 2\alpha (2 \cos l_0 \sin^2 \tfrac{1}{2} \xi + \sin l_0 \sin \xi)$$

ist.

Die rechte Seite von (6) kann aber nach Potenzen von f entwickelt werden, wenn

$$|f| < 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l_0$$

ist, oder da $\alpha < 1$ angenommen worden ist, wenn

$$|f| < (1 - \alpha)^2 \tag{7}$$

ist, was für einen Werth l_0 auch habe.

Die Gleichung (7) ist aber erfüllt, wenn

$$2 \,|\sin^2 \tfrac{1}{2} \xi\,| + |\sin \xi\,| < \frac{(1 - \alpha)^2}{2\alpha} \tag{7*}$$

ist.

Ist diese Bedingung erfüllt, erhalten wir also

$$\varphi(l) = A_0 + A_1 f + A_2 f^2 + \ldots, \tag{8}$$

wo A_0, A_1, A_2 Functionen von l_0 sind. Diese Reihe convergirt gleichförmig für alle Werthe von ξ, welche dem Bereich (7*) angehören, und zwar für alle reellen Werthe von l_0. Wir nehmen an, dass (7*) für alle ξ erfüllt ist, welche die Ungleichheit

$$|\,\xi\,| < \varrho \tag{9}$$

befriedigen, wo ϱ eine endliche Zahl bezeichnet.

Die Reihe (8) convergirt dann gleichförmig im Gebiete (9).

Nun ist aber f eine holomorphe Function von ξ, die, für alle Werthe von l_0, in eine beständig convergirende Reihe nach Potenzen von ξ entwickelt werden kann. Folglich kann nach dem Theorem von Weierstrass (in „Zur Functionenlehre") die rechte Seite von (8) in eine Reihe nach Potenzen von ξ umgeformt werden, die im Gebiete (9) convergirt, und zwar für alle reellen Werthe von l_0. Man könnte aber offenbar nicht diesen Schluss ziehen, wenn für einen bestimmten reellen Werth von l_0 die Grösse $1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l_0$ gleich Null werden könnte.

Nach dem Obigen und nach den Auseinandersetzungen in IX § 7 gestaltet sich also die Convergenz der Reihen (1), welche die Coordinaten im Problem der n-Körper ausdrücken, in folgender Weise:

Es sei eine beliebige reelle Zahl T gegeben; dann lässt sich immer eine endliche, positive Grösse R finden der Art, dass die Coordinaten im Problem der n-Körper sich für alle $|\mu| < R$ nach Potenzen von μ entwickelt werden können, und zwar convergiren diese Reihen für alle Werthe der Zeit, t, welche dem Gebiete

$$0 \leqq t \leqq T$$

angehören.

Die Grösse T kann beliebig hoch gewählt werden. Man muss indessen hier zwei mögliche Fälle unterscheiden. Der Werth des Convergenzradius kann *entweder* von T abhängig sein, oder ist für alle T gleich. Die Poincaré'sche Hilfsfunction in IX § 6 führt zu einer Integralfunction, die nach Potenzen von μ entwickelt werden kann, und der Convergenzradius dieser Entwickelung ist von T abhängig, und geht gegen Null, wenn T ins Unendliche wächst.

Nach der im genannten Paragraphen gefolgten Methode kann man nicht beweisen, dass der Convergenzradius der Entwickelung des Integrals einer gegebenen Differentialgleichung grösser ist als der entsprechende Convergenzradius der Hilfsintegralfunction. Es kann aber vorkommen, dass der wahre Convergenzradius einen viel grösseren Werth hat, und im Besonderen kommt es vor, dass der Convergenzradius bei der Entwickelung des Integrals einer gegebenen

Differentialgleichung, nach Potenzen eines Parameters μ, von T *unabhängig* ist. Die Sache könnte etwa durch Aufsuchung einer anderen Hilfsfunction erledigt werden.

Welcher von diesen Fällen (ob R von T abhängt oder nicht) bei den Differentialgleichungen für das Problem der n-Körper wirklich vorkommt, fordert eine besondere Untersuchung. Es scheint mir aber wahrscheinlich, dass hier R *nicht* von T abhängig ist.

Die practischen Schlussfolgerungen für die Störungstheorie ist in den beiden Fällen sehr verschieden. Ist R von T abhängig, dann lässt sich, *bei gegebenen Massen*, mit Hilfe von Entwickelungen nach Potenzen der Massen die Gültigkeitsdauer der Entwickelungen nicht über eine gewisse Zeit treiben. Ist diese Maximalzeit erreicht, so lassen sich die Resultate nicht auf längere Zeit ausdehnen, auch wenn man Störungen von noch so hoher Ordnung in Betracht zieht.

Ist andererseits R von T unabhängig, so convergiren die Reihen für unbeschränkte Zeit, so oft $\mu < R$ ist. Man kann dann mittelst der Störungsformeln die Coordinaten für beliebig hohe Werthe der Zeit berechnen. Die Reihen leiden aber in diesem Fall an einem anderen Übelstand, der ihre practische Verwendung beschränkt. Um je höhere Zeit die Reihen benutzt werden sollen, desto mehr Glieder müssen in den Entwickelungen mitgenommen werden, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen, desto höherer Ordnung müssen die zu berücksichtigenden Störungen sein. Die Reihen sind für alle Werthe der Zeit convergent, aber die Convergenz wird mit wachsendem Werth von t verzögert.

In beiden Fällen — sei es, dass R von T abhängig ist oder nicht — lässt sich indessen ein wichtiger Schluss ziehen: Die Entwickelungen der Coordinaten im Problem der n-Körper nach Potenzen der Massen gehören *nicht* zu den halbconvergenten Reihen. *Befindet man sich nur innerhalb des Gebietes der Convergenz, ist es sowohl berechtigt wie nützlich, Störungen höherer Ordnung in Betracht zu ziehen, um genauere Resultate zu erhalten. Je höherer Ordnung die berücksichtigten Störungen sind, desto genauer ist das Resultat.*

Die numerische Anwendung dieser Betrachtungen auf das Planetensystem ist mit nicht kleinen Schwierigkeiten verbunden.

Die Methoden des CAUCHY'schen Existenztheorems geben im Allgemeinen allzu kleine Werthe für den Convergenzradius. Sie werden vielleicht doch genügen, um den Beweis führen zu können, dass die Entwickelungen nach Potenzen der thatsächlich vorhandenen Massen im Planetensystem für einen nicht zu unbedeutenden Zeitraum convergent bleiben. Es ist aber wahrscheinlich nicht unmöglich, bessere Hilfsfunctionen aufzusuchen, die es erlauben, den Convergenzbereich schärfer zu bestimmen.

§ 5. Convergenz der Reihen in der Störungstheorie.

In IX § 9 wurde gezeigt, dass die Entwickelung der Störungsfunction in der Form

$$F = \sum A_{i i'}^{j j'} \cos(i l + i' l' + j g + j' g') \tag{1}$$

geschrieben werden kann, wo i, i', j, j' alle ganzen, positiven und negativen, Zahlenwerthe annehmen. Hier bedeuten g und g' die Winkelabstände der Perihelien von der gemeinsamen Knotenlinie der Planetenbahnen auf der unveränderlichen Ebene, und l und l' sind die mittleren Anomalien der Planeten, also von der Form

$$l = nt + c\,, \qquad l' = n't + c'\,.$$

In Bezug auf die Coefficienten $A_{i i'}^{j j'}$ wissen wir, dass sie analytische Functionen der Excentricitäten, e und e', und der gegenseitigen Neigung J der Planetenbahnen sind, welche in der Umgebung von $e = e' = J = 0$ nach positiven Potenzen von e, e' und J entwickelt werden können, wobei die Coefficienten Functionen der halben grossen Achsen, a und a', der Planetenbahnen sind.

Die Reihe

$$\sum \left| A_{i i'}^{j j'} \right| \tag{2}$$

convergirt in einem Bereich — B — für a, a', e, e' und J.

In Bezug auf die Entwickelung der Coefficienten A ist eine wichtige Eigenschaft zu bemerken, dass nämlich in der Entwickelung

(3*) $$A_{i i'}^{j j'} = \sum \alpha e^p e'^q J^r$$

immer die Ungleichheit

(3) $$p + q + r \geqq \big| \, |i| - |i'| \, \big|$$

erfüllt ist.

Wird nun unter E ein beliebiges Element verstanden, so gilt für dasselbe die Differentialgleichung

(4) $$\frac{dE}{dt} = \sum B_{i i'}^{j j'} \cos(i l + i' l' + D_{j j'}),$$

wo $D_{j j'} = j g + j' g'$ oder $D_{j j'} = j g + j' g' + 90^0$ ist.

Die Coefficienten B haben hier wesentlich dieselben Eigenschaften wie die Coefficienten A in der Entwickelung der Störungsfunction.

In der Störungstheorie werden (vergl. VI § 4), um die Störungen der ersten Ordnung zu erhalten, die Elemente g, g', a, a', e, e', J in der rechten Seite von (4) als unveränderliche Grössen betrachtet, und man erhält nach der Integration

(4*) $$E = \sum{}' \frac{B_{i i'}^{j j'}}{i n + i' n'} \sin(i l + i' l' + D_{j j'}) + C t + E_0 .$$

Es handelt sich darum, die Convergenzverhältnisse der in diesem Ausdruck auf der rechten Seite vorkommenden Summe zu untersuchen.

In Bezug auf diese Summe ist zuerst zu bemerken, dass alle solche Glieder, für welche i und i' *dasselbe Vorzeichen* besitzen, aus der Summe ausgeschieden werden können. Da nämlich für solche Glieder der Divisor $|i n + i' n|$ eine endliche untere Grenze besitzt, so bildet die Summe aller solchen Glieder eine Reihe, die innerhalb des Bereiches B convergent ist.

In Folge der Ungleichheit (3) können wir die Aufgabe noch etwas vereinfachen. Wir können nämlich $B_{i i'}^{j j'}$ auf das grösste Glied in der Entwickelung dieses Coefficienten — welche Entwickelung von der Form (3*) ist — reduciren, und indem wir eine Grösse $\varkappa$

einführen, welche gleich der grössten der — zwischen Null und der Einheit gelegenen — Grössen e, e' und J ist, so werden wir auf die Betrachtung einer Reihe von der Form

$$\sum \frac{K_{i\,i'}\,x^r}{i - i'\nu} \sin(i\,l - i'\,l' + D) \tag{5}$$

geführt, wo

$$\left\{ \begin{array}{c} i, i' = 1, 2, 3, \ldots \\ r = |\, i - i' \,| \end{array} \right. \tag{5*}$$

und ν gleich dem Verhältniss zwischen n' und n ist.

Wäre ν eine rationale Zahl, so würde ein Glied in (5) immer unendlich werden, aber auch, wenn ν irrational ist, so können die Zahlen i und i' offenbar solche Werthe annehmen, dass der Nenner $i - i'\nu$ einen beliebig kleinen Werth annimmt. Hieraus entstehen die grossen Schwierigkeiten bei diesen Convergenzuntersuchungen.

Die *rationalen* Werthe von ν können aus der Betrachtung ausgeschlossen werden, wenigstens wenn es sich um die rein störungstheoretischen Reihen handelt. Die Werthe von i und i', die so beschaffen sind, dass die Gleichung $i - i'\nu = 0$ genau erfüllt ist, geben nämlich zu *secularen* Gliedern Veranlassung, und diese Glieder sind im Coefficienten C (4*) enthalten.

Wir nehmen also an, dass ν eine *irrationale* Zahl bezeichnet, und es ist immer erlaubt, sie kleiner als die Einheit zu betrachten.

In der Summe (5) sind die Factoren sin $(i\,l - i'\,l' + D)$ nicht ohne Einfluss auf die Convergenzfrage, wie im nächsten Paragraphen näher untersucht werden soll. Wir werden indessen zuerst die Reihe

$$S = \sum \left| \frac{K_{i\,i'}\,x^r}{i - i'\nu} \right|, \tag{6}$$

wo

$$r = |\, i - i' \,|$$

ist, betrachten, und gehen, nach dem Obigen, von der Voraussetzung aus, dass die Summe

$$\sum K_{i\nu} x^{\nu} \tag{7}$$

absolut convergent ist und einen endlichen Convergenzradius (<1) besitzt.

Es existirt über diese Reihe (6) ein Theorem, das zu den wichtigsten Entdeckungen in der Störungstheorie gehört, und das ein neues und ganz unerwartetes Licht auf die Convergenzverhältnisse der bei der Behandlung des Problems der drei Körper auftretenden Reihen geworfen hat. Dieses interessante Theorem ist von Bruns in einem Aufsatze vom Jahre 1884 (Astr. Nachrichten Bd. 109) gegeben worden und lautet folgendermassen:

Es sei eine beliebige reelle Grösse v_0 gegeben und es bedeute δ eine positive oder negative Zahl. Dann giebt es zwischen $v = v_0$ und $v = v_0 + \delta$, wie klein δ auch gewählt werden mag, eine unendliche Zahl von Werthen von v, für welche die Reihe (6) convergirt, und ebenfalls in demselben Gebiete eine unendliche Zahl von Werthen von v, für welche die Reihe divergirt.

Bezeichnen wir solche Werthe von v, für welche S convergirt, als *Convergenzstellen*, und solche Werthe, für welche S divergirt, als *Divergenzstellen*, so sagt also das Theorem von Bruns aus, dass *die Convergenzstellen und die Divergenzstellen überall dichte Mengen bilden* (im ganzen reellen Gebiete für v).

Es genügt offenbar zu beweisen, dass es im genannten Gebiete *einen* Werth giebt, für welchen die Reihe convergirt, und *einen*, für welchen sie divergirt. Ist dies bewiesen, so folgt als Corollarium, dass unendlich viele derartige Werthe existiren.

Die Reihe S (6) convergirt, wenn v die Wurzel einer irreducibeln algebraischen Gleichung ist mit ganzzahligen Coefficienten (und ohne rationale Wurzeln). Es sei

$$G_0 v^m + G_1 v^{m-1} + \ldots G_m = 0 \tag{8}$$

eine solche Gleichung, wo $G_0, G_1, \ldots, G_m$ ganze Zahlen bezeichnen.

Die Wurzeln dieser Gleichung, *ausser* v, seien $v_2, v_3, \ldots, v_m$, und der Symmetrie wegen schreiben wir für v auch v_1. Im Glied

$$\frac{K x^r}{i - i'\nu}$$

multiplicire man Zähler und Nenner mit dem Produkte

$$G_0(i - i'\nu_2)(i - i'\nu_3)\ldots(i - i'\nu_m),$$

dann ist

$$G_0 \prod_{s=1}^{m}(i - i'\nu_s) = G_0 i^m - G_0 i^{m-1} i' \Sigma \nu_1 + G_0 i^{m-2} i'^2 \Sigma \nu_1 \nu_2 + \ldots$$

$$= G_0 i^m + G_1 i^{m-1} i' + G_2 i^{m-2} i'^2 + \ldots + G_m i'^m.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist *nie Null,* da (8) keine rationale Wurzel besitzt, und ist andererseits offenbar immer eine ganze Zahl, ist also *immer mindestens gleich der Einheit.* Wir bezeichnen diesen Nenner mit $N_{i\nu}$. Schreiben wir weiter

$$G_0(i-i'\nu_2)(i-i'\nu_3)\ldots(i-i'\nu_m) = H_0 i^{m-1} + H_1 i^{m-2} i' + \ldots + H_{m-1} i'^{m-1},$$

wo $H_0, H_1, \ldots, H_{m-1}$ gewisse, von i und i' unabhängige Zahlen bezeichnen, so wird die Summe S in m Reihen getrennt, welche sämmtlich die Form

$$H_s \sum \left| \frac{K_{i\nu} i^{m-s} i'^{s-1} x^r}{N_{i\nu}} \right| \tag{9}$$

haben, und hier ist nun $r = | i - i' |$, $| N_{ii} | \geqq 1$.

Ziehen wir in Betracht, dass hier nur solche Werthe von i und i' mitgenommen zu werden brauchen, für welche die Divisoren $i - i'\nu$ einen kleinen Werth ε nicht übersteigen, so ist ersichtlich, dass (9) gleichzeitig mit (7) convergiren muss. Die Reihe S ist also convergent, so oft ν eine Gleichung von der Form (8) befriedigt.

Die Zahlen, welche einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten genügen, sind aber (man vergleiche das Beispiel unten) in der Zahlenreihe überall dicht vertheilt, und hiermit ist der erste Theil des Bruns'schen Satzes bewiesen.

Dass es sich in ähnlicher Weise mit den Divergenzstellen verhält, beweist Bruns in folgender Weise:

Wir nehmen an, dass ν durch eine Reihe der folgenden Form dargestellt ist

$$\nu = \frac{1}{h_1} + \frac{\varepsilon_2}{h_1 h_2} + \frac{\varepsilon_3}{h_1 h_2 h_3} + \ldots, \tag{10}$$

wo die ε_i je nach Bedarf die Zahl $+1$ oder -1 bedeuten, und $h_1, h_2, h_3, \ldots$ ganze Zahlen sind, welche der Ungleichheit

$$h_{\alpha+1} \geqq 2h_\alpha - 1, \quad h_1 \geqq 2 \tag{11}$$

genügen.

Die Zahlen h_i mögen sonst in beliebiger Weise gewählt werden.

Die Zahlen i und i' in (6) können beliebige (positive) Zahlenwerthe annehmen. Man betrachte die Reihen von Werthen von i und i', welche nach dem folgenden Gesetz gebildet sind:

$$\left\{\begin{aligned} i &= H_\alpha \left(\frac{1}{H_1} + \frac{\varepsilon_2}{H_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_\alpha}{H_\alpha}\right), \\ i' &= H_\alpha, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

wo

$$H_r = h_1 h_2 \ldots h_r$$

ist. Wir bemerken, dass die somit erhaltenen Werthe von i und i' ganze, positive Zahlen sind. Hieraus erhält man, da ν in der Form

$$\nu = \frac{1}{H_1} + \frac{\varepsilon_2}{H_2} + \frac{\varepsilon_3}{H_3} + \ldots$$

geschrieben werden kann,

$$i - i'\nu = -\frac{\varepsilon_{\alpha+1}}{h_{\alpha+1}} - \frac{\varepsilon_{\alpha+2}}{h_{\alpha+1} h_{\alpha+2}} - \ldots,$$

und in Betracht der Ungleichheit (11) genügt es, für hinreichend grosse Werthe von α diesen Ausdruck auf das erste Glied zu

reduciren. Statt (6) erhalten wir also, wenn nur diejenigen Glieder, welche den Werthen (12) für i und i' entsprechen, in Betracht gezogen werden, die Summe

$$S' = \sum h_{a+1} \mid K_{ii'} \mid x^r. \tag{13}$$

Die Zahlen h_a können aber völlig willkürlich gewählt werden, wenn nur die Ungleichheit (11) erfüllt ist. Werden sie so gewählt, dass für alle α

$$h_{a+1} \geqq \frac{\alpha^r}{\mid K_{i\nu} \mid} \tag{14}$$

ist, so findet man, dass (13) *divergirt*, einen wie kleinen Werth x auch haben mag.

Das Bildungsgesetz (10) für ν zeigt unmittelbar, dass die so bestimmten Divergenzstellen eine überall dichte Zahlenmenge bilden. Man braucht in der That nur die Zeichen der verschiedenen s_a zu verändern, um dies zu beweisen.

Da man zum Ausdruck (10) für ν eine beliebige rationale Zahl hinzufügen kann, ohne dass die obigen Betrachtungen eine Veränderung erleiden, so findet man also, dass die Divergenzstellen in der ganzen Zahlenreihe überall dicht vertheilt sind. Man kann in jedem noch so kleinen Intervalle der reellen Zahlen beliebig viele solcher Irrationalitäten aufstellen, für welche die Reihe (6) sicher divergirt.

Beispiel 1. Wir nehmen an, dass $\nu = 1 : \sqrt{5}$ ist, so dass

$$5\nu^2 - 1 = 0 \tag{15}$$

ist; eine Gleichung, welche die Form (8) hat. Die Reihe (6) muss dann convergiren. In der That hat man hier

$$S = \sum \left| \frac{K_{i\nu} x^r}{i - i'\nu} \right| = \sum \left| \frac{K_{i\nu} x^r (i + i'\nu)}{i^2 - i'^2 \nu^2} \right|,$$

oder nach (15)

$$S = \sum \left| \frac{5 K_{i\nu} x^r (i + i'\nu)}{5 i^2 - i'^2} \right|,$$

eine Reihe, die offenbar gleichzeitig mit (7) convergent ist.

Beispiel 2. Es wird verlangt eine Divergenzstelle aufzusuchen, die von der Convergenzstelle des vorigen Beispiels weniger als auf 1:1000000 abweicht. Die Coefficienten $K_{i i'}$ werden sämmtlich gleich der Einheit gesetzt.

Zu dem Zweck wird $\nu = 1 : \sqrt{5}$ nach dem Bruns'schen Algorithmus entwickelt. Wir erhalten nach einander:

$$2\nu - 1 = -0.10558 = -\nu_1,$$

$$9\nu_1 - 1 = -0.04978 = -\nu_2,$$

$$20\nu_2 - 1 = -0.00440 = -\nu_3,$$

$$227\nu_3 - 1 = -0.00120 = -\nu_4,$$

$$833\nu_4 - 1 = -0.00040 = -\nu_5,$$

und also

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 9} + \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20} - \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20\cdot 227} + \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20\cdot 227\cdot 833} - \ldots$$

Es ist also in diesem Falle $h_1 = 2$, $h_2 = 9$, $h_3 = 20$, $h_4 = 227$, $h_5 = 833$. Wollen wir eine Divergenzstelle der verlangten Art erhalten, so bestimmen wir eine irrationale Zahl A der Art, dass die vier ersten Glieder mit den entsprechenden Gliedern in ν übereinstimmen, lassen aber die Grössen h_5, h_6 u. s. w. noch unbestimmt. Wir erhalten somit

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 9} + \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20} - \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20\cdot 227} + \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20\cdot 227\cdot h_5} - \\ - \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20\cdot 227\cdot h_5\cdot h_6} + \ldots$$

Die h_5, h_6 u. s. w. werden nun so bestimmt, dass man nach (12) und (14) setzt:

$$H_4 = 2\cdot 9\cdot 20\cdot 227 = 81720,$$

$$i_4 = H_4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 9} + \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20} - \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20\cdot 227}\right) = 36546,$$

$$i'_4 = H_4,$$

$$r_4 = |\, i_4 - i_4' \,| = 45174,$$

$$h_5 = 4^{45174}.$$

Weiter bekommt man

$$i_5 = 2\cdot 9\cdot 20\cdot 227\cdot 4^{45\,174}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 9} + \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20} - \frac{1}{2\cdot 9\cdot 20\cdot 227} + \right.$$

$$\left. + \frac{s_5}{2\cdot 9\cdot 20\cdot 227\cdot 4^{45\,174}}\right),$$

$$i'_5 = 2\cdot 9\cdot 20\cdot 227\cdot 4^{45\,174},$$

$$h_5 = 5^{i_5' - i_5} \qquad \text{u. s. w.}$$

Die Reihe (13) lautet

$$S' = \ldots + 4^{45\,174}\,x^{45\,174} + (5\,x)^{i_5' - i_5} + \ldots$$

und divergirt, was für einen Werth x auch hat.

Indem man die Zeichen von s_5, s_6 u. s. w. wechselt, erhält man eine beliebige Anzahl von Divergenzstellen, die sich auf weniger als 1:68000000 von $\nu = 1:\sqrt{5}$ unterscheiden.

Man könnte, nachdem diese eigenthümlichen Convergenzverhältnisse der Reihe (6) erwiesen worden sind, die Frage aufstellen, ob überhaupt die durch die Störungstheorie erhaltenen Reihen einen wirklichen mathematischen Sinn haben. Wollte man, um einen solchen zu erzwingen, die mittleren Bewegungen — und somit auch ν — auf solche Werthe beschränken, für welche die Reihe (6) convergirt, so würde man zwar in der Praxis in dieser Weise beliebig grosse Annäherung erhalten können, da die Convergenzstellen eine überall dichte Menge bilden. Man würde aber in dieser Weise nur die Schwierigkeit verschoben und nicht überwunden haben. Wir wissen nämlich — nach dem CAUCHY-POINCARÉ'schen Existenztheorem —, dass die Coordinaten im Drei-Körperproblem analytische Functionen der Integrationsconstanten sind, und man könnte kaum erklären, wie eine Lösung der Differentialgleichungen, welcher diese Eigenschaft fehlt, zu einer Bestimmung der Integrationsconstanten aus den Beobachtungen benutzt werden könnte.

Bevor ich zur Lösung dieser Schwierigkeiten übergehe, will ich einen interessanten, von GYLDÉN gemachten Versuch auseinandersetzen, durch den er so zu sagen die Spitze der Schwierigkeiten abbrechen will.

Gyldén sucht nämlich zu beweisen, dass, obgleich die Convergenz- und die Divergenzstellen überall dicht vertheilt sind, *die Wahrscheinlichkeit einer Divergenz doch unendlich klein ist.*

Er stützt sich hierbei auf einen merkwürdigen, von ihm gefundenen mathematischen Satz, den ich zuerst ableiten will, wobei ich mich indessen auf das für die astronomische Frage Nothwendige beschränke.

Die Untersuchungen Gyldén's über diese Frage sind in zwei schwedisch geschriebenen Abhandlungen in „Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar" 1888 enthalten, von welchen er ein kurzes Referat in den „Comptes Rendus" der Pariser Academie vom Jahre 1888 gegeben hat. Diese Untersuchungen sind später von Brodén (Meddelanden från Lunds Observatorium Nr. 11, 1900) und Wiman (in „Öfversigt etc." 1900, Nr. 7) ergänzt und vertieft worden.

Es sei ν eine gegebene, zwischen 0 und 1 gelegene, irrationale Zahl,[1] für welche die Kettenbruchentwickelung

$$\nu = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} \tag{16}$$

gültig ist, und wo $a_1, a_2, a_3, \dots$ *positive* Zahlen bezeichnen, deren Werthe mit ν eindeutig bestimmt sind.

Die Zahl ν hat einen *beliebigen* Werth zwischen 0 und 1, so dass alle Theilstrecken von derselben Länge im genannten Intervalle als gleichberechtigt betrachtet werden sollen. Wir nehmen also als *gleich wahrscheinlich* an, dass ν zwischen ν_1 und $\nu_1 + \delta\nu_1$ oder zwischen ν_2 und $\nu_2 + \delta\nu_2$ fällt, wenn ν_1 und ν_2 beliebige Werthe zwischen 0 und 1 haben, und $\delta\nu_1 = \delta\nu_2$ ist.

Es lässt sich dann die folgende Aufgabe aufstellen und beantworten: *Wenn die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ im Kettenbruch gegeben sind, welches ist 1) die Wahrscheinlichkeit $F_{n,k}$, dass die nächstfolgende*

[1] Für den hier abgeleiteten *mathematischen* Satz ist nicht nothwendig, dass die rationalen ν-Werthe ausgeschlossen werden.

Zahl a_{n+1} *einen Werth* k *annimmt* (k eine ganze Zahl), *welches ist 2) die Wahrscheinlichkeit* $W_{n,k}$, *dass* $a_{n+1} \geqq k$ *ist.*

Um die Frage klar zu legen, fangen wir mit einem einfachen Beispiel an.

Es sei eine Relation

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \tag{17}$$

zwischen den beiden Grössen x und y gegeben.

Hier kann x alle reellen Werthe — also nicht nur die ganzen Zahlenwerthe — zwischen 1 und ∞ annehmen und für y sind alle Werthe zwischen $^1/_2$ und 1 gleich wahrscheinlich. Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass x zwischen 1 und 3 liegt.

Offenbar wächst y continuirlich mit x. Für $x = 1$ ist $y = {^1/_2}$, für $x = 3$ ist $y = {^3/_4}$, und da nach der Voraussetzung y-Werthe zwischen $^1/_2$ und $^3/_4$ ebenso wahrscheinlich sind wie y-Werthe zwischen $^3/_4$ und 1, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen 1 und 3 liegt, gleich $^1/_2$.

Gehen wir zu der allgemeineren Gyldén'schen Aufgabe zurück, so wollen wir zuerst an einige bekannte Eigenschaften der Kettenbruchentwickelung erinnern. Wir bezeichnen den Näherungsbruch des Kettenbruches (16), die aus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gebildet ist, mit

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{r_n}{s_n},$$

dann gelten bekanntlich die Relationen

$$r_{n+1} = a_{n+1} r_n + r_{n-1}, \quad s_{n+1} = a_{n+1} s_n + s_{n-1}, \tag{18}$$

$$\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n} = \frac{(-1)^n}{s_n s_{n+1}}, \tag{19}$$

wo $r_1 = 1$, $r_2 = a_2$, $s_1 = a_1$, $s_2 = a_2 a_1 + 1$.

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden nun von Brodén l. c. in folgender Weise abgeleitet.

Es sei n eine bestimmte Zahl, und man setze für $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestimmte Werthe voraus, nicht aber für a_{n+1}, a_{n+2} u. s. w. Dann sind die möglichen Werthe des Kettenbruches zwischen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(a_1, a_2, \ldots, a_n, 1)$ enthalten, und die erste oder zweite dieser Grenzzahlen ist die kleinere, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es ist somit v an eine Strecke von der Länge

$$l_{n1} = (-1)^n \{(a_1, \ldots, a_n, 1) - (a_1, \ldots, a_n)\}$$

gebunden. Nach (19) und (18) findet man hierfür den Ausdruck

$$(19^*) \qquad l_{n1} = \frac{1}{s_n\, s_{n+1}} = \frac{1}{s_n\,(s_n + s_{n-1})}.$$

Es sei ferner k eine *ganze* Zahl $\geqq 1$. Ist $a_{n+1} \geqq k$, wobei $a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ beliebige Werthe annehmen, so muss der entsprechende Werth von v in die Strecke

$$l_{nk} = (-1)^n \{(a_1, \ldots, a_n, k) - (a_1, \ldots, a_n)\}$$

fallen, welche Strecke nach (19) die Länge

$$(19^{**}) \qquad l_{nk} = \frac{1}{s_n\,(k s_n + s_{n-1})}$$

hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass, bei gegebenen $a_1, \ldots, a_n$, $a_{n+1} \geqq k$ ist, wird durch den Quotienten von l_{nk} und l_{n1} ausgedrückt und setzen wir

$$(20) \qquad q_n = \frac{s_{n-1}}{s_n},$$

so ist also diese Wahrscheinlichkeit W_{nk} gleich

$$(21) \qquad W_{nk} = \frac{1 + q_n}{k + q_n}.$$ [1]

---

[1] Bei GYLDÉN hat sich bei der Ableitung dieser Wahrscheinlichkeit ein Rechenfehler eingeschlichen, der von BRODÉN corrigirt worden ist.

Je grösser k ist, desto kleiner ist also die Wahrscheinlichkeit, dass a_{n+1} einen Werth hat, der gleich oder grösser als k ist. Diese Wahrscheinlichkeit hängt von q_n ab. Indessen findet man aus (18), dass q_n immer kleiner als die Einheit ist. Folglich muss W in den folgenden Grenzen eingeschlossen sein:

$$\frac{1}{k} < W < \frac{2}{k+1}. \tag{22}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Theilnenner a_n im Kettenbruch, ganz abgesehen von den Werthen der übrigen Theilnenner, grösser als k ist, wird also immer kleiner als $2:k$ sein.

$$W < \frac{2}{k}. \tag{22*}$$

Es ist dieser Satz, den wir für das Folgende brauchen.

Man kann aus (21) die Wahrscheinlichkeit F_{nk} ableiten, dass a_{n+1}, bei gegebenen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, genau den Werth k annimmt. Wir erhalten

$$F_{nk} = W_{nk} - W_{n(k+1)} =$$
$$= \frac{1+q_n}{(k+q_n)(k+1+q_n)},$$

und für hinreichend grosse Werthe von k findet man, dass F, bei beliebigen Werthen von $a_1, a_2, \ldots, a_n$, immer kleiner als $2:k^2$ ist.

Gyldén hat aus diesen Sätzen verschiedene interessante Schlussfolgerungen gezogen, von denen ich nur den eigenthümlichen Satz erwähne, dass, bei der Entwickelung einer beliebig gewählten Zahl im Kettenbruch, der wahrscheinliche Werth eines Theilnenners — a — gleich 2 ist, so dass bei einer solchen Entwickelung ebenso oft 1 als Nenner vorkommt, als solche Zahlen, die grösser als 2 sind.

Für die astronomischen Anwendungen dieser Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen genügt es, den Satz (22*) in Betracht zu ziehen.

Wir kehren nun zur Gleichung (6) zurück, wo wir, der Einfachheit halber, $K_{ii'} = 1$ setzen.[1] Weiter werden in der Reihe nur diejenigen Werthe von i und i' in Betracht gezogen, welche den Näherungsbrüchen $r_n : s_n$ der Kettenbruchentwickelung von ν entsprechen. Der entsprechende Exponent von x in (6) hat dann, für $\nu < 1$, den Werth $s_n - r_n$, und da r_n annähernd den Werth νs_n hat, so können wir also statt (6) die Reihe

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varepsilon^{s_n}}{r_n - s_n \nu} \right| \tag{23}$$

betrachten, wo ε eine Grösse, die < 1 ist, bedeutet, deren Werth annähernd durch die Formel $\varepsilon = x^{1-\nu}$ gegeben wird.

Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Kettenbrüche hat man

$$\nu = \frac{r_n}{s_n} + (-1)^n \left\{ \frac{1}{s_n\, s_{n+1}} - \frac{1}{s_{n+1}\, s_{n+2}} + \ldots \right\},$$

und also ist *genähert*

$$r_n - s_n \nu = \frac{(-1)^{n+1}}{s_{n+1}},$$

so dass wir mit einer Reihe von der Form

$$U = \sum s_{n+1}\, \varepsilon^{s_n}$$

zu thun haben. Setzen wir hier, nach (18),

$$s_{n+1} = a_{n+1}\, s_n + s_{n-1},$$

so zerfällt (23) in zwei Reihen, U' und U'', von denen die eine

---

[1] Dies ist berechtigt, da wir von der Voraussetzung ausgegangen sind, dass die Summe $\sum K_{ii'}\, x^r$ einen endlichen Convergenzradius besitzt. Die obige Annahme bedeutet nur, dass wir den Convergenzradius gleich der Einheit wählen.

$$U'' = \sum s_{n-1}\, \varepsilon^{\varepsilon_n}$$

offenbar immer convergirt. Die zu untersuchende Reihe lautet somit

(24) $$U' = \sum a_{n+1}\, s_n\, \varepsilon^{\varepsilon_n}\,.$$

Aus dieser Form lässt sich die Ueberalldichtheit der Convergenz- und Divergenzstellen unmittelbar beweisen. Sind nämlich die Theilnenner $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gegeben, so muss v auf die Strecke l_{m1} (19*) beschränkt sein. Werden nun a_{m+1}, a_{m+2} u. s. w. so gewählt, dass sie sämmtlich kleiner als eine beliebige endliche Zahl k sind, dann ist offenbar die Reihe U' convergent, und diese Convergenzstellen sind in der genannten Strecke überall dicht vertheilt. Aehnliches gilt von den Divergenzstellen, wenn man die Zahl a_{m+1} in passender Weise wählt (z. B. indem man $a_{m+1} \geqq \varepsilon^{-\varepsilon_m}$ setzt).

Gyldén stellt nun die Behauptung auf, dass *die Wahrscheinlichkeit für die Divergenz der Reihe (24) unendlich klein ist.*

Dieser Satz, dessen Beweis von Gyldén nur angedeutet wird, wird von Wiman l. c. abgeleitet. In der folgenden Darstellung habe ich diesen Beweis zu vereinfachen versucht.

Erstens findet man, dass die Reihe (24) gleichzeitig mit der Reihe

(25) $$U''' = \sum a_{n+1}\, \varepsilon^{\varepsilon_n}$$

convergirt oder divergirt. Wir betrachten deswegen diese Reihe.

In Bezug auf die Convergenz einer Potenzreihe gilt indessen folgender Satz.

Es sei eine Potenzreihe

(26) $$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

gegeben. Wenn dann für alle n, die grösser als n_1 sind, die Ungleichheiten

(26*) $$|\, A_n x_1^n \,| \leqq 1$$

stattfinden, so convergirt (26) absolut für alle $|\, x \,| < |\, x_1 \,|$.

Umgekehrt ist die Reihe nicht absolut convergent, wenn es nicht möglich ist einen derartigen Werth n_1 von n zu finden.

Wendet man dieses Theorem auf die Summe (25) an, so ist diese Reihe convergent für alle $\varepsilon < \varepsilon_1$, wenn von einem gewissen Werth $n = n_1$ an und für alle grösseren die Ungleichheiten

$$a_{n+1} \leqq \frac{1}{\varepsilon_1^{\varepsilon n}} \tag{27}$$

stattfinden.

Welche Wahrscheinlichkeit ist dafür vorhanden, dass die Gleichungen (27) für alle $n > n_1$ erfüllt sind?

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine *gewisse* dieser Ungleichheiten *nicht* erfüllt ist, wird nach (22*) kleiner als

$$2\,\varepsilon_1^{\varepsilon n}.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass (27) für ein gewisses n erfüllt ist, grösser als

$$1 - 2\,\varepsilon_1^{\varepsilon n}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass sämmtliche Gleichungen (27) befriedigt sind, ist grösser als das Product

$$\prod_{n=n_1}^{\infty} (1 - 2\,\varepsilon_1^{\varepsilon n}),$$

welcher Ausdruck aber für einen hinreichend hohen Werth von n_1 beliebig nahe der Einheit kommt. Die Wahrscheinlichkeit für die Convergenz der Reihe (25) unterscheidet sich also von der Einheit um eine unendlich kleine Grösse.

Die Wahrscheinlichkeit für die Divergenz der Reihe (25), und also auch der Reihe (23), ist somit unendlich klein. W. z. b. w.

Ueber die Bedeutung des Gyldén'schen Satzes hat zwischen den Herren Brodén und Wiman ein theilweise sehr lebhafter

Meinungsaustausch stattgefunden,[1] der in vielen Beziehungen von Interesse ist. WIMAN hält die GYLDÉN'sche Behauptung in strengstem mathematischen Sinne aufrecht, wogegen von BRODÉN die Ansicht verfochten wird, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht auf die hier vorkommenden, überall dichten Zahlmengen ausgedehnt werden darf.

Wie dem auch sei, so ist aus diesen Untersuchungen hervorgegangen, dass zwischen den Divergenz- und den Convergenzstellen ein bestimmter mengentheoretischer Unterschied besteht, für welchen man, nach meiner Ansicht, ohne grosse Missverständnisse zu befürchten, den Ausdruck GYLDÉN's, dass die Wahrscheinlichkeit für die Divergenz unendlich klein sei, anwenden kann, obgleich es sehr möglich ist, dass man hierfür einen adäquateren mathematischen Ausdruck finden könnte. Unzweifelhaft ist auch, dass dieser Satz von grosser Bedeutung für gewisse Probleme in der Mechanik des Himmels ist; ich hoffe, dass ich in einem folgenden Abschnitt Gelegenheit habe, auf diese Frage zurückzukommen.

Dagegen löst man nicht in dieser Weise die Schwierigkeiten, welche das Theorem von BRUNS in Bezug auf die Reihe (6) enthüllt hat. Auch wenn die Wahrscheinlichkeit für die Divergenz noch so klein ist, so hindert dies nicht, dass man, z. B. bei der Bestimmung der Werthe der Integrationsconstanten, gezwungen wird, bei einer continuirlichen Veränderung der Anfangszustände nach einander eine unendliche Zahl Convergenz- und Divergenzstellen zu passiren. Die Constantenbestimmung würde unter solchen Umständen mathematisch unverständlich erscheinen, und die ganze Störungstheorie würde auf einem trügerischen Untergrund aufgebaut sein. Glücklicherweise lassen sich die betreffenden Schwierigkeiten in anderer Weise beseitigen, wie wir im nächsten Paragraphen näher auseinandersetzen wollen.

---

[1] BRODÉN: Bemerkungen über Mengenlehre und Wahrscheinlichkeitstheorie. Malmö 1901.

WIMAN: Bemerkungen über eine von GYLDÉN aufgeworfene Wahrscheinlichkeitsfrage. Lund 1901.

BRODÉN: Noch einmal die GYLDÉN'sche Wahrscheinlichkeitsfrage. Malmö 1901.

§ 6. Convergenz der Reihen in der Störungstheorie. Fortsetzung.

Die Untersuchungen von BRUNS beziehen sich auf die Reihe (6) des vorigen Paragraphen, wogegen die Reihen in der Störungstheorie thatsächlich von der Form (5) oder (4*) sind. Nun folgt zwar aus der Convergenz der Reihe (6), dass auch (5) convergiren muss; es ist aber nicht nothwendig, dass (5) für solche v-Werthe divergiren muss, welche den Divergenzstellen der Reihe (6) entsprechen. Es sind in der That die trigonometrischen Factoren in der Reihe (4), welche bewirken, dass das Integral dieser Differentialgleichung als eine *analytische* Function des Verhältnisses v zwischen den mittleren Bewegungen n' und n dargestellt werden kann.[1]

Indem wir bemerken, dass die Grössen $in + i'n'$, wo i und i' alle positiven und negativen ganzen Zahlenwerthe annehmen, eine *abzählbare* Menge bilden, können wir die zu untersuchende Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dE}{dt} = \sum_1^\infty A_s \cos(\lambda_s t + G_s) \tag{1}$$

schreiben.

Wird diese Gleichung zwischen t_0 und t integrirt, so erhalten wir

$$E - E_0 = \sum_{s=1}^\infty \frac{A_s}{\lambda_s} [\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)] \tag{2}$$

$$+ C(t - t_0),$$

wo

$$C = S A_s \cos G_s \tag{2*}$$

ist; diese Summe ist über alle Glieder auszudehnen, für welche $\lambda_s = 0$ ist.

[1] Die hier gegebenen Betrachtungen sind hauptsächlich in einem Aufsatz des Verfassers: „Einige Bemerkungen über die Convergenz der Reihen in der Störungstheorie," Astr. Nachr. 2913, 1889, enthalten.

Es wird angenommen, wie im vorigen Paragraphen, dass die Summe

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s$$

absolut convergent ist, und also auch die Summe (2*), und es lässt sich dann beweisen, dass E eine analytische Function von n und n' ist.

Man hat in der That

$$\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s) = 2\cos\left[\frac{\lambda_s}{2}(t + t_0) + G_s\right] \sin\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0),$$

und also

$$(3)\quad \begin{cases} E - E_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 A_s}{\lambda_s} \cos\left[\frac{\lambda_s}{2}(t + t_0) + G_s\right] \sin\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0) \\ \qquad + C(t - t_0). \end{cases}$$

Nun gilt aber für alle reellen Werthe von λ_s und $t - t_0$ die Ungleichheit

$$(4)\quad \left|\sin\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0)\right| < \left|\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0)\right|.$$

Schreiben wir nun

$$(5)\quad \begin{cases} E - E_0 = \sum_{s=1}^{p-1} \frac{A_s}{\lambda_s}\left[\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)\right] \\ \qquad + C(t - t_0) + R_p, \end{cases}$$

so ist

$$R_p \leqq \sum_{s=p}^{\infty} \left|\frac{2 A_s}{\lambda_s} \cos\left[\frac{\lambda_s}{2}(t + t_0) + G_s\right] \sin\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0)\right|$$

und nach (4) hat man somit

$$R_p < (t - t_0) \sum_{s=p}^{\infty} | A_s | . \tag{6}$$

Nach der Voraussetzung ist aber $\sum A_s$ absolut convergent; wir können also, wenn eine beliebig kleine Grösse σ gegeben ist, immer eine Zahl p' finden, derart, dass, für alle $p > p'$,

$$\sum_{s=p}^{\infty} | A_s | < \sigma$$

ist. Wir bekommen dann

$$R_p < (t - t_0) \sigma . \tag{7}$$

Diese Gleichung zeigt, dass, für alle endlichen reellen Werthe von t, die Zahl p' immer so gewählt werden kann, dass, für alle $p > p'$, das Restglied in (5) einen beliebig kleinen Werth annimmt. Diese Reihe, und also auch (2), ist somit für alle reellen Werthe der Zeit convergent, und zwar *absolut* convergent, so dass man die Glieder gegen ihre absoluten Beträge vertauschen kann. Indessen kann der Werth des Restgliedes von t abhängig sein. Nach der Terminologie von Weierstrass („Abhandlungen aus der Functionenlehre". S. 70) sagt man dann, dass die Reihe nicht gleichmässig convergent ist, indem für verschiedene Werthe von t verschiedene Werthe von p' gewählt werden müssen, damit das Restglied unter eine gegebene Grenze fällt.

Die Untersuchung von Bruns bezog sich auf die Reihe

$$\sum \left| \frac{A_s}{\lambda_s} \right| \tag{8}$$

und gab als Resultat, dass bei dieser Reihe die Convergenz vom Werthe des Verhältnisses — ν — zwischen n' und n abhängig war, und zwar stellte sich heraus, dass die Convergenz- und die Divergenzstellen dabei überall dicht vertheilt waren. Bei den in der

Störungstheorie thatsächlich vorkommenden Reihen, welche von der Form (2) sind, erscheint dagegen das Integral als eine continuirliche und analytische Function von ν, die Divergenzstellen der Reihe (8) bewirken in der That hier nur, dass die Convergenz nicht eine gleichmässige wird.

Bevor wir zu den astronomischen Schlussfolgerungen aus diesem Satze übergehen, will ich die obigen Betrachtungen etwas erweitern.

Wir haben im Obigen angenommen, dass die Differentialgleichungen in der Störungstheorie sämmtlich von der Form

$$\frac{dE}{dt} = \sum A_s \cos(\lambda_s t + G_s) \tag{9}$$

sind, und wir haben in VI § 4 gefunden, dass man die Störungen immer aus solchen Differentialgleichungen erhalten kann. Indessen zeigte sich im genannten Paragraphen, dass in einigen Fällen — nämlich wenn es sich um die Störungen der mittleren Länge handelte — schon bei den Störungen der ersten Ordnung in der rechten Seite von (9) das Integral über eine unendliche Reihe von derselben Form (9) vorkommen kann. Wir haben dann in diesem Falle eigentlich mit einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \sum A_s \cos(\lambda_s t + G_s) \tag{10}$$

zu thun, und wir wollen untersuchen, wie die obigen Schlüsse dann modificirt werden müssen.

Nach (2) bekommen wir aus (10) zuerst

$$\tag{11} \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{\lambda_s} [\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)] \\ + C(t - t_0), \end{aligned} \right.$$

wo

$$C = S A_s \cos G_s$$

ist.

Die Integration von (11) giebt

$$(12)\qquad x = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{\lambda_s^2} H_s + \frac{1}{2} C (t - t_0)^2 + \frac{d x_0}{d t}(t - t_0) + x_0,$$

wo

$$H_s = \cos(\lambda_s t + G_s) - \cos(\lambda_s t_0 + G_s) + \sin(\lambda_s t_0 + G_s) \times \lambda_s (t - t_0)$$

ist. Man hat aber

$$H_s = -2 \sin\left[\frac{\lambda_s}{2}(t + t_0) + G_s\right] \sin\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0) + \sin(\lambda_s t_0 + G_s) \times \lambda_s (t - t_0),$$

welchen Ausdruck wir in der Form

$$H_s = -\left[\sin\left[\frac{\lambda_s}{2}(t + t_0) + G_s\right] - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)\right] \lambda_s (t - t_0)$$

$$+ 2 \sin\left[\frac{\lambda_s}{2}(t + t_0) + G_s\right] \left\{\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0) - \sin\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0)\right\}$$

schreiben können, oder

$$H_s = -2 \cos\left[\frac{\lambda_s}{4}(t + 3 t_0) + G_s\right] \sin\frac{\lambda_s}{4}(t - t_0) \times \lambda_s (t - t_0)$$

$$+ 2 \sin\left[\frac{\lambda_s}{2}(t + t_0) + G_s\right] \left\{\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0) - \sin\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0)\right\}.$$

Es gelten indessen für alle reellen Werthe von λ_s und $t - t_0$ die folgenden Ungleichheiten

$$\left|\sin\frac{\lambda_s}{4}(t - t_0)\right| < \left|\frac{\lambda_s}{4}(t - t_0)\right|,$$

$$\left|\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0) - \sin\frac{\lambda_s}{2}(t - t_0)\right| < \frac{1}{48} \mid \lambda_s^3 (t - t_0)^3 \mid,$$

von denen die letztere aus der Potenzentwickelung der Sinus-Function abgeleitet werden kann. Folglich hat man

$$| H_s | \leqq \tfrac{1}{2} | \lambda_s^2 (t - t_0)^2 | + \tfrac{1}{24} | \lambda_s^3 (t - t_0)^3 | ,$$

und, wenn dieser Werth in (12) eingeführt wird, ist

$$(13)\quad \begin{cases} x = -\sum_{s=1}^{p-1} \frac{A_s}{\lambda_s^2} [\cos(\lambda_s t + G_s) - \cos(\lambda_s t_0 + G_s) + \sin(\lambda_s t_0 + G_s) \times \lambda_s (t - t_0)] \\ \qquad + \frac{1}{2} C (t - t_0)^2 + \frac{d x_0}{d t} (t - t_0) + x_0 + R_p', \end{cases}$$

wo

$$(13^*)\qquad R_p' \leqq (t - t_0)^2 \tfrac{1}{2} \sum_{s=p}^{\infty} | A_s | + (t - t_0)^3 \sum_{s=p}^{\infty} \tfrac{1}{24} | \lambda_s A_s |$$

Das Restglied kann also, für einen gegebenen Werth von t, dadurch beliebig klein gemacht werden, dass p hinreichend gross gewählt wird. Die im Ausdruck für x vorkommende Reihe ist also absolut convergent, obgleich der Werth des Restgliedes unter Umständen von t abhängig sein kann. Es ist nicht nothwendig, dass dem so ist. Wenn nämlich die Reihe

$$(14)\qquad \sum \left| \frac{A_s}{\lambda_s^2} \right|$$

convergirt, was für gewisse ν-Werthe der Fall ist — wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde —, so ist R_p' nicht von t abhängig. In jedem Fall gilt indessen die Ungleichheit (13*), sei es, dass die Reihe (14) convergent ist, oder nicht.

In der Formel (13*) ist das zweite Glied im Allgemeinen verschwindend, da es sich hier hauptsächlich um solche Glieder handelt, bei denen die Grössen λ_s einen sehr kleinen Werth annehmen. Wird die Reihe (13) bei einem bestimmten Glied abgebrochen — wie es in der Praxis ja nothwendigerweise der Fall sein muss —, so wächst also der übrig bleibende Fehler proportional dem Quadrate der Zeitdifferenz.

Das Integral der Gleichung

$$\frac{d E}{d t} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \cos (\lambda_s t + G_s)$$

ist nach (2) von der Form

$$E = E_0 + \sum \frac{A_s}{\lambda_s} [\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)]$$
$$+ C(t - t_0)$$

und ist eine analytische Function der verschiedenen λ_s, die in der Umgebung von $\lambda_s = 0$ nach positiven Potenzen von λ_s entwickelt werden kann. Es folgt hieraus, dass E auch eine analytische Function des Verhältnisses von n' und n ist.

Dies Integral wird im Allgemeinen in der Form

$$E = K + \sum \frac{A_s}{\lambda_s} \sin(\lambda_s t + G_s) + C(t - t_0)$$

geschrieben, wo K eine Integrationsconstante bezeichnet, und die Convergenzuntersuchungen werden an die Reihe

$$\sum \frac{A_s}{\lambda_s} \sin(\lambda_s t + G_s) \tag{15}$$

geknüpft, welche die von BRUNS entdeckten merkwürdigen Eigenschaften besitzt. Indessen übergeht man dabei stillschweigend, *dass die Integrationsconstante K selbst eine Function von λ_1, λ_2, λ_3, ... ist, welche dieselben Singularitäten besitzt wie die Reihe (15),* und dass diese Singularitäten in der That sich gegenseitig aufheben.

Aehnliches gilt vom Integral der Differentialgleichungen von der Form (10).

Die nicht gleichmässige Convergenz der Reihen in der Störungstheorie hat zur praktischen Folge, dass man genöthigt wird desto mehr Glieder in den Reihen mitzunehmen, je länger die Zeiträume sind, für welche diese Reihen die Coordinaten der Planeten darstellen sollen. Früher oder später werden die Restglieder in den Reihen (5) und (13) sich merkbar machen, und die Ungleichheiten (6) und (13*) geben interessante Aufschlüsse über

die Art, in welcher sich die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung zeigen müssen. *Die in (5) vernachlässigten Glieder wirken, als ob ein der Zeit proportionales Glied ausser Acht gelassen worden ist, wogegen in (13) der Fehler proportional der zweiten Potenz der Zeitdifferenz wächst.*

Auf die Elementenstörungen übertragen sagt dieser Satz aus, dass man, bei einer Störungsrechnung, folgende Unterschiede zwischen der Theorie und der Beobachtung zu erwarten hat:

Bei der halben grossen Achse, der Excentricität, der Neigung, der Perihellänge und der Knotenlänge werden Fehler, welche proportional der Zeit wachsen, zum Vorschein kommen. Diese Fehler haben den Anschein, als ob die secularen Glieder aus der Theorie nicht richtig abgeleitet sind.

Bei der mittleren Länge kann der Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung proportional der zweiten Potenz wachsen. Dieser Fehler tritt als eine seculare Veränderung in der mittleren Bewegung auf.

Es fehlen in der Geschichte der Astronomie nicht Beispiele von solchen Mängeln an Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung. Das berühmteste Beispiel dieser Art ist die von Halley 1693 entdeckte *seculare Beschleunigung der Länge des Mondes,* die nach Halley 10″.2 betrug, so dass es also, um eine Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zu erhalten, nothwendig war, ein Glied

$$+ 10''.2\, t^2$$

zu der aus der Theorie erhaltenen Länge des Mondes hinzuzufügen.

Dies Glied hat also genau die Form, die man erwarten könnte, wenn man diesen Unterschied aus den von der Theorie vernachlässigten Gliedern erklären wollte, und in der That gelang es Laplace 1786 ein von der Theorie bis dahin nicht berücksichtigtes Glied zu entdecken, welche die Halley'sche Ungleichheit in befriedigender Weise erklärte.

Von solchen Abweichungen zwischen den Beobachtungen und den astronomischen Störungsrechnungen hat in unserer Zeit eine

unerklärte seculare Störung in der Länge des Perihels des *Merkurs* zu umfassenden Discussionen und Untersuchungen Veranlassung gegeben. NEWCOMB, dem man die vollständigsten Untersuchungen über diese Frage verdankt, findet („The Elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy," Washington 1895) für die jährliche mittlere Perihelbewegung des *Merkurs* (1850) die Werthe:

$$\text{Aus den Beobachtungen} \quad +5''.751\,,$$
$$\text{„ der Theorie} \quad +5''.338\,,$$

so dass eine jährliche Abweichung von $+0''.413$ unerklärt bleibt, die ungefähr 7.2 % des ganzen beobachteten Werthes beträgt, wogegen die Unsicherheit der Beobachtung sich auf 0.34 % beläuft. Man hat zur Erklärung dieses Umstandes die verschiedensten Hypothesen aufgestellt und ohne hinreichenden Erfolg geprüft, wobei man auch Veranlassung genommen hat, das NEWTON'sche Gesetz gegen ein anderes zu vertauschen. Da indessen, wie eben bewiesen worden ist, Abweichungen dieser Art zwischen Beobachtungen und Rechnung bei allen Störungsrechnungen kaum zu vermeiden sind, so darf man vorläufig erwarten, dass auch in diesem Falle das NEWTON'sche Gesetz über die Schwierigkeiten triumphiren wird, und dass eine vollständigere Störungsrechnung oder verbesserte Integrationsmethoden einmal die Erklärung dieser Anomalie geben werden.

Man würde aber Unrecht thun, wenn man hieraus den Schluss ziehen wollte, dass man immer annehmen könnte, dass alle Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung, welche proportional der Zeit wachsen, eventuell durch eine genauere Störungsrechnung ihre Erklärung finden könnten. Wäre eine solche Schlussfolgerung erlaubt, so würde man in eine höchst bedenkliche Unsicherheit gegenüber allen Abweichungen von der Theorie geraten. Die Ungleichheit (6) erlaubt indessen dieser Unsicherheit eine Grenze zu setzen, indem sie einen Maximalbetrag des zu befürchtenden Fehlers gibt, der nicht überschritten werden darf, insofern ein erwiesener Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung aus der Theorie

erklärt werden soll. Die Coëfficienten A_s sind aus der Entwickelung der Störungsfunction bekannt und für die Summe $\sum_{p}^{\infty} A_s$ kann man immer einen genäherten Werth erhalten. Wenn der beobachtete Unterschied diesen Betrag überschreitet, so muss man die Erklärung ausserhalb der untersuchten Punktsysteme suchen.

Es mag indessen nicht ausser Acht gelassen werden, dass hierbei auch ein genäherter Werth der Glieder, die von den höheren Potenzen der Massen abhängen, gefunden werden muss, und es liegt in der That keine unüberwindliche Schwierigkeit im Wege, einen solchen Werth zu ermitteln.

ELFTER ABSCHNITT

ÜBER DIE FORM DER INTEGRALE IM PROBLEM DER DREI KÖRPER

§ I. Ein Transformationstheorem der Mechanik.

In seiner hinterlassenen Abhandlung „Ueber diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunction existirt, und über die Theorie der Störungen“ (Werke Bd. V) hat JACOBI folgendes Theorem bewiesen:

„Es seien die Differentialquotienten der veränderlichen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *durch die Gleichungen gegeben:*

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d x_1}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{d y_1}{d t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \\
\frac{d x_2}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial y_2}, & \frac{d y_2}{d t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
\frac{d x_m}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial y_m}, & \frac{d y_m}{d t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_m};
\end{aligned}
\right.
$$

es sei ferner

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

eine willkürliche Function der m Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *und der m neuen Grössen* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; *bestimmt man diese neuen Grössen und die m anderen Grössen* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *aus* $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *vermittelst der Gleichungen*

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \quad y_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \quad y_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \quad y_m, \\
&\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} = -\eta_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} = -\eta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} = -\eta_m,
\end{aligned}
\right.
$$

und drückt H durch t und diese neuen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *aus, so erhält man die Differentialquotienten dieser neuen Elemente durch die ganz ähnlichen Gleichungen:*

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \eta_1}, & \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \eta_2}, & \dfrac{d\eta_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_2}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d\xi_m}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \eta_m}, & \dfrac{d\eta_m}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_m}. \text{"} \end{cases}$$

Dies Theorem, das in allgemeiner Weise den Uebergang von einem System canonischer Coordinaten zu einem anderen vermittelt, werde ich in zwei verschiedenen Richtungen erweitern.

Erstens braucht das Theorem insofern verallgemeinert zu werden, als in dem JACOBI'schen Transformationstheorem vorausgesetzt wird, dass die Function ψ, welche den Uebergang zwischen den beiden canonischen Elementensystemen vermittelt, von der Zeit unabhängig ist. Man kann indessen diese Voraussetzung fallen lassen, und es zeigt sich, dass man dann zum folgenden Transformationstheorem gelangt:

Theorem I. Es seien die Differentialquotienten der veränderlichen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m$ durch die Gleichungen gegeben

$$(4)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

wo H eine willkürliche Function der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m$ und t bezeichnet; es sei ferner

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; t)$$

eine willkürliche Function der m Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ und der m neuen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ und der Zeit; bestimmt man diese neuen Grössen und die m anderen neuen Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ aus $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m$ und t vermittelst der Gleichungen

$$(5)\qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = y_i;$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$(5^*)\qquad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = -\eta_i$$

und drückt H durch t und diese neuen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ aus, so erhält man die Differentialquotienten dieser neuen Elemente durch die Gleichungen:

$$(6)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

wo

$$(7)\qquad R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ist.

Ist ψ von t unabhängig, so kommt man offenbar auf das JACOBI'sche Theorem zurück.

Der Beweis wird ohne Kunstgriffe geführt, indem man mittelst der Gleichungen (5) und (5*) in H x_i und y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ gegen ξ_i und η_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ vertauscht. Ich führe ihn hier aus.

Werden die Gleichungen (5) und (5*) nach x_i und y_i aufgelöst, so bekommt man

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m; t), \\ y_i &= y_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m; t). \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Setzt man diese Werthe in H ein, so geht diese Function in eine Function von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ und t über. Wird diese sodann nach η_k differentiirt, so sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ und t als Constanten zu betrachten, und wir bekommen somit

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \eta_k}$$

oder nach (4)

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = -\sum_i \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \eta_k}.$$

Aus (5) folgt aber

$$\frac{\partial y_i}{\partial \eta_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k},$$

so dass

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = -\sum_i \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum_i \sum_j \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k}$$

oder, wenn man in der ersten Summe den Index i gegen j vertauscht und in der Doppelsumme die Summationsordnung wechselt,

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \left[- \frac{d y_j}{d t} + \sum_i \frac{d x_i}{d t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right].$$

Wird aber die Gleichung (5)

$$y_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

nach der Zeit differentiirt, so bekommt man

$$\frac{d y_j}{d t} = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \frac{d x_i}{d t} + \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_i} \frac{d \xi_i}{d t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t},$$

so dass

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = - \sum_j \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_i} \frac{d \xi_i}{d t} - \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t}.$$

Der Coëfficient von $\frac{d \xi_i}{d t}$ ist gleich

$$- \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_i}.$$

Nun ist aber nach (5*)

$$- \eta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}.$$

Wird diese Gleichung nach η_k differentiirt, so erhält man

$$0 = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \quad (i \neq k),$$

wogegen

$$- 1 = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k};$$

also ist

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \frac{d \xi_k}{d t} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k}.$$

Setzt man

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

so ist also

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

womit die erste der Gleichungen (6) bewiesen ist.

Um die entsprechende Gleichung für $d\eta_k : dt$ zu erhalten, verfährt man in ähnlicher Weise.

Zuerst bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi_k} &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_k} \\ &= -\sum_i \frac{d y_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{d x_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (5)

$$y_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

erhält man die Relationen

$$\frac{\partial y_i}{\partial \xi_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_k},$$

$$\frac{d y_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{d x_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t},$$

welche, in den obigen Ausdruck für $\partial H : \partial \xi_k$ eingesetzt, geben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi_k} = &-\sum_i \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} - \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \\ &+ \sum_i \frac{d x_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_k}. \end{aligned}$$

Die Doppelsumme kann in eine einfache Summe verwandelt werden, wenn man bemerkt, dass aus der Gleichung (5*)

$$-\eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}$$

durch Differentiation nach ξ_k die Gleichung

$$0 = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_k}$$

folgt. Es ist also

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{d \xi_j}{d t} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{d x_j}{d t} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}.$$

Andererseits ist aber nach (5*)

$$-\frac{d \eta_k}{d t} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial x_j} \frac{d x_j}{d t} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \frac{d \xi_j}{d t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial t},$$

so dass

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = -\frac{d \eta_k}{d t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial t} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial t}}{\partial \xi_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \xi_k}.$$

Folglich ist

$$\frac{d \eta_k}{d t} = -\frac{\partial \left(H + \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)}{\partial \xi_k},$$

womit der zweite Theil des Transformationstheorems bewiesen ist.

Nimmt man beispielsweise an, dass man die Bewegungsgleichungen (4) mit Hilfe einer sog. *intermediären Bahn* mit der charakteristischen Function H_1 integriren will, so hat man nach der Methode von Hamilton-Jacobi zuerst die partielle Differentialgleichung

$$(8) \qquad 0 = \frac{\partial V}{\partial t} + H_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_m; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_m}; t\right)$$

zu betrachten. Wenn

$$V = V(x_1, x_2, \ldots, x_m; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; t),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Integrationsconstanten bezeichnen, das Integral der Gleichung (8) ist, so erhält man bekanntlich die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ und $y_1, y_2, \ldots, y_m$ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Vergleicht man aber diese Gleichungen mit den Gleichungen (5) und (5*), so findet man nach Theorem I, dass man das System (4) gegen die Gleichungen

$$(9) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

vertauschen kann, wo jetzt

$$R = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

ist. Nach (8) ist aber

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -H_1,$$

so dass also

$$R = H - H_1$$

ist, übereinstimmend mit der gewöhnlichen Theorie für die Variation der Constanten.

Die Constanten α_i und β_i, die man bei der Integration der Gleichung (8) erhält, sind im Allgemeinen nicht geeignet zur Benutzung als neue Veränderliche in einem Bewegungsproblem. Im Problem der drei Körper z. B. treten in den Gleichungen (8) rechter Hand mit der Zeit multiplicirte Glieder auf, welche der Integration beträchtliche und unnöthige Schwierigkeiten bereiten. Für die Kepler'sche Ellipse als intermediäre Bahn kennt man schon längst eine Methode, wie man diese Schwierigkeit, durch Einführung neuer Veränderlichen, vermeiden kann. Man vergleiche in dieser Beziehung den fünften Abschnitt § 5. Für andere intermediäre Bahnen müssen aber andere Transformationen eingeführt werden, und es giebt bis jetzt keine allgemeine Theorie, um solche Transformationen aufzusuchen.

Ich werde im Folgenden einen ziemlich allgemeinen Fall besprechen, in welchem man die gesuchte Transformation direct angeben kann.

Ich nehme an, dass die charakteristische Function H_1 für die intermediäre Bahn die Zeit t *nicht* explicite enthält. Die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung

$$(10) \qquad 0 = \frac{\partial V}{\partial t} + H_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_m; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_m}\right)$$

hat dann das Integral

$$V = -Ct + W,$$

wo W von t unabhängig ist. Wir nehmen weiter an, dass man ein Integral

$$W = W(x_1, x_2, \ldots, x_m; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

der Differentialgleichung

$$(10^*) \qquad C = H_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_m; \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_m}\right)$$

gefunden hat, das m *unabhängige* Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ enthält. Die Constante C kann mit einer dieser Integrationsconstanten zusammenfallen. Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall und dann ist nach (10*) C eine gewisse Function von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

$$C = C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Die Coordinaten x_i und y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ der intermediären Bahn sind durch die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i$$

bestimmt, also durch

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} t - \beta_i.$$

Diese Gleichungen zeigen aber nach dem Transformationstheorem von Jacobi, dass

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

und

$$-\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1, \quad -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2, \quad \ldots, \quad -\frac{\partial C}{\partial \alpha_m} t + \beta_m$$

conjugirte canonische Coordinaten sind, und zwar kann man das ursprüngliche System (4) durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w_i}, \\ \frac{dw_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ersetzen, wo

$$w_i = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} t + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ist.

So oft ein System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ von Integrationsconstanten gefunden worden ist, kann man auf unendlich viele Weisen andere Systeme von Integrationsconstanten finden. Zu jedem System der Grössen α_i gehört ein bestimmtes System der Grössen w_i. Es gilt, die vortheilhafteste Wahl der Grössen α_i zu treffen.

Unter den vielen intermediären Bahnen, die man für ein mechanisches Problem aufstellen kann, will ich hier solche ins Auge fassen, in welchen die Coordinaten als bedingt periodische Functionen der Zeit erscheinen. Mittelst einer linearen Transformation der Argumente (man vergleiche II § 3 (21)) kann man bewirken, dass die Periode in Bezug auf die verschiedenen Winkelcoordinaten gleich 2π ist. Wir nennen diese Argumente $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, so dass

$$\eta_i = n_i t + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

und die Coordinaten in der intermediären Bahn periodische Functionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ mit der Periode 2π sind. Wählt man nun die Integrationsconstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ in solcher Weise, dass

$$n_i = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_i}$$

wird, und nennt man diese besonderen Constanten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, so dass nunmehr

$$n_i = -\frac{\partial C}{\partial \xi_i}$$

ist, so hat man

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\eta_i$$

und folglich sind ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ conjugirte canonische Coordinaten.

Wie sollen diese Constanten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ gefunden werden?

Ich nehme zuerst an, dass in der charakteristischen Function H_1 für die intermediäre Bahn die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nur in quadratischer Form vorkommen, und dass die Integration der Gleichung

$$10^*) \qquad C = H_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_m; \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_m}\right)$$

durch Separation der Variabeln geschehen kann. Nach STÄCKEL lautet dann das Integral der Gleichung (10*)

$$(11) \qquad W = \sum_{\varkappa=1}^{m} \int \sqrt{2\psi_\varkappa(x_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{m} 2\alpha_\lambda \varphi_{\varkappa\lambda}(x_\varkappa)}\, dx_\varkappa .$$

Hier bezeichnen $\psi_\varkappa(x_\varkappa)$ und $\varphi_{\varkappa\lambda}(x_\varkappa)$ gewisse gegebene Functionen von $x_\varkappa$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sind die Integrationsconstanten, von denen α_1 mit der Constante C in (10*) zusammenfällt. Die Integrale der Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i}$$

sind demnach

$$t - \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad y_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1},$$
$$-\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \quad y_2 = \frac{\partial W}{\partial x_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\beta_m = \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}, \quad y_m = \frac{\partial W}{\partial x_m}.$$

Es zeigt sich dann, dass die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bedingt periodische Functionen — mit der Periode 2π — einiger Grössen

$u_1, u_2, \ldots, u_m$ sind, welche in folgender Weise mit der Zeit zusammenhängen (II § 3 (21)). Man hat

$$(12)\quad \begin{cases} \pi(-t+\beta_1) = \omega_{11} u_1 + \omega_{21} u_2 + \ldots + \omega_{n1} u_n, \\ \pi\beta_2 = \omega_{12} u_1 + \omega_{22} u_2 + \ldots + \omega_{n2} u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi\beta_m = \omega_{1n} u_1 + \omega_{2n} u_2 + \ldots + \omega_{nn} u_n, \end{cases}$$

wo

$$(12^*)\quad \omega_{ij} = \int\limits_{a_i}^{b_i} \frac{\varphi_{ij}(x_i)\, d x_i}{\sqrt{2\psi_i(x_i) + \sum\limits_{j=1}^{m} 2\alpha_j \varphi_{ij}(x_i)}}$$

ist, und a_i und b_i die Grenzen bezeichnen, zwischen denen die Grösse x_i oscillirt. Diese Grenzen sind immer Wurzeln der Gleichung

$$2\psi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} 2\alpha_j \varphi_{ij}(x) = 0.$$

Es wird angenommen, dass die Determinante

$$\Omega = |\omega_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

nicht identisch verschwindet.

Die Grössen ω_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ werden Elementarperioden genannt.

Aus der vorhergehenden Untersuchung ist ersichtlich, dass man

$$\eta_i = u_i$$

haben muss, um eine Transformation der verlangten Art zu erhalten.

Wie müssen zu diesem Zweck die Grössen ξ_i gewählt werden?

Wir werden beweisen, dass man

$$(13)\quad \xi_i = \frac{1}{\pi} \int\limits_{a_i}^{b_i} \sqrt{2\psi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} 2\alpha_j \varphi_{ij}(x)\, d x} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

setzen muss, um die zu η_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) conjugirten canonischen Coordinaten zu erhalten.

Es ist in der That erlaubt, die Integrationsconstanten α_1, α_2, $\ldots$, α_m gegen irgend ein anderes System α_1', α_2', $\ldots$, α_m' von Integrationsconstanten zu vertauschen, wenn nur die Functionaldeterminante des einen Systems in Bezug auf das andere System von Null verschieden ist (I § 9). Weiter wissen wir, dass die zu ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_m conjugirten Coordinaten die Form

$$\eta_i = -\frac{\partial C}{\partial \xi_i} t + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

haben. Wir werden sehen, dass diese Grössen mit den Grössen u_1, u_2, $\ldots$, u_m zusammenfallen, und dass ausserdem die Functionaldeterminante ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_m in Bezug auf α_1, α_2, $\ldots$, α_m von Null verschieden ist.

Lösen wir nämlich die m Gleichungen (13) in Bezug auf α_1, α_2, $\ldots$, α_m auf, so hat man

$$\alpha_1 = \alpha_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m). \tag{14}$$

Diese Gleichung werden wir in Bezug auf α_1, α_2, $\ldots$, α_m differentiiren, und bekommen dann

$$\left\{\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha_1} + \ldots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_m}\frac{\partial \xi_m}{\partial \alpha_1}, \\ 0 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_m}\frac{\partial \xi_m}{\partial \alpha_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha_m} + \ldots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_m}\frac{\partial \xi_m}{\partial \alpha_m}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Nun ist aber nach (12*) und (13)

$$\omega_{ij} = \pi \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j}, \tag{16}$$

so dass folglich die Gleichungen (15) lauten

$$\pi = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} \omega_{11} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \omega_{21} + \ldots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_m} \omega_{m1},$$

$$0 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} \omega_{12} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \omega_{22} + \ldots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_m} \omega_{m2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} \omega_{1m} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \omega_{2m} + \ldots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_m} \omega_{mm}.$$

Da α_1 mit C zusammenfällt, so findet man bei einem Vergleich mit den Gleichungen (12), dass $\eta_i = u_i$ ist. Da weiter die Functionaldeterminante der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ in Bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ nach (16) gleich

$$\pi^{-m} \mid \omega_{ij} \mid \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

ist, und diese Determinante der Voraussetzung nach nicht verschwindet, so bilden die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ zusammen ein unabhängiges System von Integrationsconstanten. Wir gelangen somit zum folgenden Theorem:

Theorem II: „Es seien die Differentialquotienten der veränderlichen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *durch die Gleichungen gegeben:*

$$(17) \qquad \frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{d y_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

es sei ferner eine intermediäre Bahn durch die Gleichungen definirt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d x_i}{d t} &= \frac{\partial H_1}{\partial y_i}, \\ \frac{d y_i}{d t} &= -\frac{\partial H_1}{\partial x_i}, \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

wo H_1 *eine quadratische Form der Grössen* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *ist. Wenn die Differentialgleichungen mittelst der in* II § 1 *auseinandergesetzten Methoden integrirt werden können, so erscheinen die Coordinaten der intermediären Bahn als periodische Functionen, mit der Periode* 2π, *der* m *Argumente*

$$\eta_i = \eta_i t + c_i = -\frac{\partial C}{\partial \xi_i} t + c_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

wo ξ_i, *mit den Bezeichungen des citirten Paragraphen, durch die Relation*

$$\xi_i = \frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{2 \psi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} 2 \alpha_j \varphi_{ij}(x)}\, d x$$

definirt ist. Drückt man dann H *durch* t *und diese neuen Grössen* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *aus, so erhält man die Differentialquotienten dieser neuen Elemente durch die Gleichungen*

$$\frac{d \xi_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d \eta_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}. \text{“} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Zur Erläuterung dieses Satzes führe ich den Beweis für einen Freiheitsgrad aus. Es sei

$$\frac{d x}{d t} = \frac{\partial H}{\partial y}; \qquad \frac{d y}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

wo

$$H = \tfrac{1}{2} y^2 - U(x)$$

ist. Dann lautet die Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = U + \alpha,$$

so dass

$$W = \int \sqrt{2(U + \alpha)}\, d x.$$

ist. Folglich hat man

$$t + \beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int \frac{d x}{\sqrt{2(U + \alpha)}}.$$

Aus diesem Ausdruck folgt, dass die Zeit T zwischen einem Minimum x_2 und einem Maximum x_1 der Grösse x durch die Formel

$$T = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2(U+\alpha)}}$$

gegeben ist. Setzt man

$$\xi = \frac{1}{\pi} \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{2(U+\alpha)}\, dx,$$

so ist folglich

$$T = \pi \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}.$$

Die Grösse x ist eine periodische Function von t mit der Periode $2T$ oder, anders ausgedrückt, eine periodische Function von

$$nt + c$$

mit der Periode 2π, wenn

$$n = \frac{\pi}{T}$$

gesetzt wird. Nach dem obigen Ausdruck für T hat man also

$$n = \frac{1}{\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi},$$

womit der Satz für einen Freiheitsgrad bewiesen ist.

Wenn die intermediäre Bahn eine Kepler'sche Ellipse ist, so stellt sich die Anwendung des Theorems II folgendermassen.

Nach den Ausführungen in II § 1 (14), IV § 2 (2) und (3) und § 8 (8**) hat man hier

$$(18) \quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{r_2}^{r_1} \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^2}}\, dr, \\[2ex] \xi_2 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-i}^{+i} \sqrt{2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi, \\[2ex] \xi_3 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2\alpha_3}\, d\theta; \end{cases}$$

$$(18^*)\qquad \begin{cases} \eta_1 = n(t + H_1), \\ \eta_2 = n(t + H_1) + H_2, \\ \eta_3 = n(t + H_1) + H_2 + H_3. \end{cases}$$

wo die Integrationsconstanten α_1, α_2, α_3; H_1, H_2, H_3 in folgender Weise mit den gewöhnlichen elliptischen Elementen zusammenhängen. Man hat

$$2\alpha_1 = -\frac{\mu}{a}; \quad 2\alpha_2 = \mu a(1 - e^2); \quad 2\alpha_3 = \mu a(1 - e^2)\cos^2 i$$

und

$$H_1 = -t_\pi, \quad H_2 = \pi - \Omega, \quad H_3 = \Omega.$$

In V § 5 haben wir α_1, α_2, α_3 und H_1, H_2, H_3 als veränderliche Elemente zur Darstellung der Coordinaten im Probleme der drei Körper eingeführt. Statt dessen werden wir hier ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3 benutzen. Nach Theorem II wissen wir, dass, wenn irgend welche Grössen x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 durch die Gleichungen

$$(19)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

definirt sind, und wenn durch die gewöhnlichen Formeln für die elliptische Bewegung x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 durch ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 ausgedrückt werden, die letzteren Grössen durch die Gleichungen

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

bestimmt werden, welche Gleichungen dann vollständig die Relationen (19) ersetzen.

Wir wollen die Ausdrücke für ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Functionen der elliptischen Elemente aufsuchen.

Die Grenzen r_2 und r_1, zwischen denen r schwankt, sind, durch die elliptischen Elemente ausgedrückt, $a(1 - e)$ und $a(1 + e)$. Da

$$\xi_1 = \frac{1}{\pi}\int_{r_2}^{r_1} \sqrt{-2\alpha_1(r_1 - r)(r - r_2)}\,\frac{dr}{r},$$

so bekommt man nach der Substitution

$$r = a(1 - e\cos w),$$

indem man auf den Wert von α_1 Rücksicht nimmt:

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{\mu a}}{\pi}\int_0^\pi \left[-\frac{1-e^2}{1-e\cos w} + 1 + e\cos w\right] dw$$

oder, nach einer bekannten Formel,

$$\xi_1 = \sqrt{\mu a}\,(1 - \sqrt{1-e^2}). \tag{20}$$

In die Formel für ξ_2

$$\xi_2 = \frac{\sqrt{2\alpha_2}}{\pi}\int_{-i}^{+i} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi$$

macht man die Substitution

$$\sin\varphi = \sin i \sin u$$

und bekommt dann, nach einer kleinen Rechnung,

$$\xi_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,(1 - \cos i). \tag{20*}$$

Endlich hat man

$$\xi_3 = \sqrt{2\alpha_3} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i. \tag{20**}$$

Die Elemente ξ_i und η_i fallen nicht mit den Delaunay'schen Elementen, die wir in V § 5 eingeführt haben, zusammen. Man kann aber durch eine lineare Substitution von dem einen System zum anderen übergehen. Die Bedingungen für eine solche Transformation leitet man leicht aus dem Jacobi'schen Transformationstheorem ab. Setzt man nämlich

$$\psi = (a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + \dots + a_{1m}\,\xi_m)\,\eta_1',$$
$$+ (a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + \dots + a_{2m}\,\xi_m)\,\eta_2',$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ (a_{m1}\,\xi_1 + a_{m2}\,\xi_2 + \dots + a_{mm}\,\xi_m)\,\eta_m'$$

sowie

$$\eta_1 = \frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} = a_{11}\,\eta_1' + a_{21}\,\eta_2' + \dots + a_{m1}\,\eta_m',$$
$$\eta_2 = \frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} = a_{12}\,\eta_1' + a_{22}\,\eta_2' + \dots + a_{m2}\,\eta_m',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\eta_m = \frac{\partial\psi}{\partial\xi_m} = a_{1m}\eta_1' + a_{2m}\eta_2' + \dots + a_{mm}\,\eta_m',$$

und

$$\xi_1' = \frac{\partial\psi}{\partial\eta_1'} = a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + \dots + a_{1m}\,\xi_m,$$
$$\xi_2' = \frac{\partial\psi}{\partial\eta_2'} = a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + \dots + a_{2m}\,\xi_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\xi_m' = \frac{\partial\psi}{\partial\eta_m'} = a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + \dots + a_{mm}\,\xi_m,$$

so bilden nach dem Jacobi'schen Theorem ξ_i', η_i' $(i = 1, 2, \dots, m)$ zusammen ein canonisches System, wenn dies für ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ der Fall ist.

Um zu den Delaunay'schen Elementen in V § 5 überzugehen, müssen wir

$$\xi_1' = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,$$
$$\xi_2' = \qquad \xi_2 + \xi_3,$$
$$\xi_3' = \qquad\qquad \xi_3$$

setzen, und folglich sind die entsprechenden canonischen Winkelelemente η_1', η_2', η_3' durch die Relation

$$\eta_1 = \eta_1',$$
$$\eta_2 = \eta_1' + \eta_2',$$
$$\eta_3 = \eta_1' + \eta_2' + \eta_3'$$

gegeben, so dass

$$\eta_1' = \eta_1 \qquad = n(t + H_1),$$
$$\eta_2' = \eta_2 - \eta_1 = \pi - \Omega,$$
$$\eta_3' = \eta_3 - \eta_2 = \Omega$$

ist, mit den Formeln in V § 5 übereinstimmend.

Zweckmässiger wäre übrigens eine andere lineare Transformation auszuführen, nämlich

$$\xi_1'' = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \sqrt{\mu a},$$
$$\xi_2'' = \xi_1 \qquad = \sqrt{\mu a}\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right),$$
$$\xi_3'' = \xi_2 \qquad = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}(1 - \cos i),$$

in welchem Falle die entsprechenden canonischen Winkelelemente η_1'', η_2'', η_3'' durch folgende Formeln bestimmt sind

$$\eta_1 = \eta_1'' + \eta_2'',$$
$$\eta_2 = \eta_1'' + \eta_3'',$$
$$\eta_3 = \eta_1'',$$

oder

$$\eta_1'' = \eta_3 \qquad = n(t + H_1) + \pi,$$
$$\eta_2'' = \eta_1 - \eta_3 = - \pi,$$
$$\eta_3'' = \eta_2 - \eta_3 = - \Omega.$$

Löst man die Ausdrücke (20), (20*) und (20**) nach α_1 auf, so bekommt man

$$\alpha_1 = - \frac{\mu^2}{2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2},$$

woraus wir

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_3} = \frac{\mu^2}{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^3} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$$

erhalten. Die Argumente η_1, η_2, η_3 haben also dieselbe mittlere Bewegung — n — wie schon aus den Ausdrücken (18*) ersichtlich ist.

Als intermediäre Bahn kann man in einigen Problemen diejenige Bahn benutzen, welche *ein massenloser Körper beschreibt, der von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetz angezogen wird.* Im dritten Abschnitt haben wir die dabei auftretenden Bahnformen ausführlich behandelt. Man bekommt hier

$$(21)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\sqrt{2\left((K+K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha\right)}\,\dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}, \\[2ex] \xi_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_2}^{b_2}\sqrt{2\left((K-K')\mu + h\mu^2 + \alpha\right)}\,\dfrac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - c^2}}, \end{cases}$$

wo a_1 und b_1 die Grenzen sind, zwischen denen die Grösse λ schwankt, wogegen a_2 und b_2 die entsprechenden Grenzen für μ sind.

Die Winkelgrössen η_1 und η_1 ergeben sich aus den Relationen

$$(21^*)\quad \begin{cases} \pi(t + \beta_1) = \omega_{11}\eta_1 + \omega_{21}\eta_2, \\ \pi\beta_2 = \omega_{12}\eta_1 + \omega_{22}\eta_2, \end{cases}$$

wo man hat:

$$\omega_{11} = \frac{\partial \xi_1}{\partial h}, \quad \omega_{21} = \frac{\partial \xi_2}{\partial h},$$

$$\omega_{12} = \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}, \quad \omega_{22} = \frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha}.$$

Im *asteroidischen Dreikörper-Problem* eignet sich in vielen Fällen die zuletzt behandelte intermediäre Bahn zur Benutzung. Wir wollen von diesem Gesichtspunkte aus einen Blick auf dies Problem werfen. Nach IX § 2 lauten die Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2),$$

wo

$$(22)\quad H = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + n(p_1 q_2 - p_2 q_1) - U.$$

Hier bedeuten q_1 und q_2 die rechtwinkligen Coordinaten des massenlosen Körpers in Bezug auf ein bewegliches Coordinatensystem —

mit der Drehungsgeschwindigkeit n — bezogen. Die Grösse n fällt mit der Winkelgeschwindigkeit in der kreisförmigen Bewegung von m_1 und m_2 um den gemeinsamen Schwerpunkt zusammen. Uebrigens verweise ich auf die Bezeichnungen im betreffenden Paragraphen.

Der Anfangspunkt der Coordinaten ist hier in den Schwerpunkt der Massen m_1 und m_2 gelegt. Um eine vollständige Analogie mit dem Zweicentren-Problem zu erhalten, legen wir ihn in den Mittelpunkt der Linie $m_1 m_2$. Zu diesem Zweck setzen wir

$$x_1 = q_1 + \frac{1-\mu}{2(1+\mu)},$$

$$x_2 = q_2, \quad y_1 = p_1, \quad y_2 = p_2.$$

Die neuen Coordinaten x_1, x_2, y_1, y_2 sind offenbar auch canonisch, so dass man hat:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2). \tag{23}$$

Hier ist

$$H = \tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + n(y_1 x_2 - y_2 x_1) + \frac{n(1-\mu)}{2(1+\mu)} y_2 - U$$

und

$$U = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 + \frac{1}{2})^2 + x_2^2}}.$$

Wir definiren nun eine intermediäre Bahn durch die charakteristische Function

$$H_1 = \tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - U. \tag{24}$$

Die entsprechenden Differentialgleichungen sind

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2). \tag{25*}$$

Dies sind die Differentialgleichungen für die Bewegung eines massenlosen Körpers, der von zwei festen Centren angezogen wird. Die Coordinaten dieser Bahn, also auch die Grössen x_1, x_2, y_1, y_2,

sind bedingt periodische Functionen der Zeit, welche in FOURIER'sche Reihen nach den Vielfachen von η_1 und η_2 (21*) entwickelt werden können. Die Coëfficienten in diesen Reihen können als Functionen der in (21) definirten Grössen ξ_1 und ξ_2 ausgedrückt werden. Nachdem x_1, x_2, y_1, y_2 in dieser Weise als Functionen von $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ gefunden sind, setzt man diese Ausdrücke in H ein und bestimmt die Veränderungen der Grössen $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ nach dem JACOBI'schen Transformationstheorem vermittelst der Gleichungen

$$(26) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2).$$

Hier ist indessen zu bemerken, dass die Grösse H_1, nach der Substitution der Ausdrücke für x_1, x_2, y_1, y_2 durch $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ sich auf eine Function von ξ_1 und ξ_2 reducirt, da ja die Gleichungen (25*) das Integral $H_1 =$ Constans besitzen. Nennt man diese Constante C_1, so hat man also

$$(27) \qquad H = C_1 + n(y_1 x_2 - y_2 x_1) + \frac{n(1-\mu)}{2(1+\mu)} y_2 .$$

Dies ist also der einfache Ausdruck für die Störungsfunction, wenn man vom Zweicentren-Problem ausgeht und nachher die willkürlichen Constanten dieses Problems variirt.

Die Constante C_1 ist eine Function nur von ξ_1 und ξ_2. Die übrigen Glieder in (27) sind periodische Functionen von η_1 und η_2, die leicht zu berechnen sind, nachdem x_1, x_2, y_1, y_2 durch $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ ausgedrückt worden sind. Die Störungsfunction ist also sehr leicht zu bilden, nachdem die Coordinaten im Zweicentren-Problem als Functionen der Zeit dargestellt sind, welche Darstellung indessen verschiedene Untersuchungen erfordert, die bis jetzt nicht ausgeführt worden sind. Sehr bemerkenswerth ist, dass man bei der Anwendung dieser intermediären Bahn eine Störungsfunction erhält, in welcher *der reciproke Werth des Abstandes zwischen dem gestörten und dem störenden Körper nicht mehr zum Vorschein kommt.*

Es folgt hieraus, dass das Zweicentren-Problem einen innigen Zusammenhang mit dem Problem der drei Körper haben muss.

Da die canonischen Differentialgleichungen nicht symmetrisch in den „p-Coordinaten“ und in den „q-Coordinaten“ sind, so muss das JACOBI'sche Transformationstheorem etwas anders formulirt werden, je nachdem in der Transformationsfunction die eine oder die andere Art von Coordinaten auftritt. Der Vollständigkeit wegen stelle ich hier die diesbezüglichen Formeln zusammen.

Ich werde die alten Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ und die neuen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ nennen, und zwar so, dass man immer hat

$$\frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{d y_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{28}$$

und auch

$$\frac{d \xi_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d \eta_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}. \tag{29}$$

Wir können dann 4 Fälle unterscheiden:

1) Die Transformationsfunction ψ hängt von $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ ab, so dass

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_m; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m).$$

Die Relationen zwischen den alten und den neuen Coordinaten sind dann

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = -\eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{30}$$

2) Ist

$$\psi = \psi(y_1, y_2, \ldots, y_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m),$$

so hat man

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_i} = x_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta_i} = -\xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

3) Ist dagegen

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m),$$

so haben diese Relationen die Form

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta_i} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

4) Wenn endlich

$$\psi = \psi(y_1, y_2, \ldots, y_m; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m),$$

so hat man

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_i} = x_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

In vielen Fällen, wo die charakteristische Function von anderer Form ist, als in Theorem II vorausgesetzt worden ist, kann man sich ähnlicher Methoden bedienen wie oben. Wir werden unten bei Behandlung des DELAUNAY'schen Problems einen solchen Fall kennen lernen.

§ 2. Ueber mechanische Probleme mit einem Freiheitsgrad.

Für den Fall, dass zwei reelle Grössen x und y durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1}$$

bestimmt sind, haben wir im zweiten Abschnitt § 2 die Veränderungen von x und y untersucht, unter der Voraussetzung, dass H eine quadratische Function von y ist von der Form

$$H = \tfrac{1}{2} y^2 - U(x).$$

Wir haben gefunden, dass x dann zwischen zwei festen Grenzen periodisch schwankt, und dass *zwischen* diesen Grenzen keine Maxima oder Minima von x vorkommen. Für gewisse Werthe der Integrationsconstanten können Limitationsbewegungen auftreten.

Wir wollen nun diese specielle Voraussetzung über H fallen lassen und nur annehmen, dass H innerhalb eines gewissen *reellen* Gebietes — G — eine Function rationalen Charakters von x und y ist.

Die Gleichungen (1) haben das Integral

$$H(x, y) = C. \tag{2}$$

Diese Relation, die immer bestehen muss, enthält die Gleichung für die *Bahncurve*, die also nur von einem einzigen Parameter abhängt. Es ist indessen zu bemerken, dass nicht alle Werthe von x und y, welche der Curve (2) angehören, wirklich bei der Bewegung erreicht werden können. Vielmehr wird der Punkt (x, y) im Allgemeinen nur einen Theil der Curve (2) beschreiben, und zwar ist *nicht* nothwendig, dass diese Bahncurve ein *isolirter* Zweig der Curve (2) ist.

Betrachten wir die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \tag{3}$$

wo also nur reelle Werthe von x und y vorkommen, und nehmen wir an, dass wir mit dem Punkt (x_0, y_0) anfangen, wo $\partial H : \partial y$ beispielsweise positiv ist, so ist klar, dass x mit wachsendem t auch wachsen muss, bis wir zu einem Punkt (a, b) kommen, in welchem

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

ist.

Wie wird sich die Grösse x nachher ändern? Um diese Frage zu untersuchen, werden wir die Function H nach den Potenzen von $x - a$ und $x - b$ entwickeln, was ja möglich ist, wenn der Punkt (a, b) innerhalb des Gebietes G liegt, wie hier vorausgesetzt wird.

Da der Punkt (a, b) nothwendigerweise auf der Curve (2) liegen muss, so hat man

$$\left\{\begin{aligned} H - C = {} & A_{10}(x-a) + A_{01}(y-b) + \\ & + A_{20}(x-a)^2 + A_{11}(x-a)(y-b) + A_{02}(y-b)^2 \\ & + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right. \tag{4}$$

und folglich

$$\frac{\partial H}{\partial y} = A_{01} + A_{11}(x-a) + 2A_{02}(y-b) + \dots. \tag{4*}$$

Der Voraussetzung nach soll dieser Ausdruck für $x = a$ und $y = b$ verschwinden, woraus folgt, dass $A_{01} = 0$ ist. Mit Hilfe der Gleichung

$$(4^{**}) \begin{cases} 0 = H - C = A_{10}(x-a) + \\ \qquad + A_{20}(x-a)^2 + A_{11}(x-a)(y-b) + A_{02}(y-b)^2 \\ \qquad + \cdots \end{cases}$$

können wir in der Umgebung des Punktes (a, b) $y - b$ durch $x - a$ ausdrücken. Setzt man diesen Werth in (4^*) ein, so nimmt (3) die Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

an, womit die Differentialgleichungen der Bewegung auf Quadratur gebracht sind.

Es zeigt sich, dass Bewegungen ganz verschiedener Art auftreten, je nachdem A_{10} von Null verschieden ist oder nicht.

Wir betrachten zuerst den Fall

$$A_{10} \neq 0.$$

Es sei rechter Hand von (4^{**})

$$A_{0s}(y-b)^s$$

das Glied niedrigster Ordnung in $y - b$, das nicht mit $x - a$ multiplicirt ist. Dann ist

$$0 = A_{10}(x-a) + A_{0s}(y-b)^s + \sum A_{ij}(x-a)^i(y-b)^j,$$

wo in der Summe alle Glieder, für die $i = 0$ ist, einen Index j haben, der größer als s ist. Wir erhalten dann in der Umgebung des Punktes (a, b) die Entwickelung

$$(5) \qquad x - a = (y-b)^s[\alpha_0 + \alpha_1(y-b) + \alpha_2(y-b)^2 + \ldots].$$

Hier ist

$$\alpha_0 = -A_{0s} : A_{10}, \tag{6}$$

woraus folgt, dass α_0 *nicht unendlich und nicht Null ist.*

Durch Umkehrung dieser Reihe erhält man

$$y - b = \beta_1 (x-a)^{1/s} + \beta_2 (x-a)^{2/s} + \beta_3 (x-a)^{3/s} + \ldots, \tag{7}$$

wo β_1 endlich und von Null verschieden ist.

Diesen Ausdruck für $y - b$ setzen wir in (4*) ein, welche Gleichung jetzt folgende Form hat:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = s A_{0s}(y-b)^{s-1} + \sum j A_{ij}(x-a)^i (y-b)^{j-1},$$

wo in der Summe, für $i = 0$, $j > s$ ist.

Wird hier die Reihe (7) eingesetzt, so erhält man für die Gleichung (3) die Form

$$\frac{dx}{dt} = (x-a)^{\frac{s-1}{s}} \left[\gamma_0 + \gamma_1 (x-a)^{\frac{1}{s}} + \gamma_2 (x-a)^{\frac{2}{s}} + \ldots\right]$$

oder

$$\frac{dx}{(x-a)^{\frac{s-1}{s}}} [1 + \delta_1 (x-a)^{1/s} + \delta_2 (x-a)^{2/s} + \ldots] = \gamma_0 \, dt,$$

wo γ_0 endlich und von Null verschieden ist.

Das Integral dieser Gleichung lautet

$$s(x-a)^{1/s} \left[1 + \frac{\delta_1}{2}(x-a)^{1/s} + \frac{\delta_2}{3}(x-a)^{2/s} + \ldots\right] = \gamma_0 (t - t_0),$$

wo t_0 denjenigen Werth von t bezeichnet, für welchen $x = a$ ist.

Durch Umkehrung dieser Reihe erhält man zuletzt

$$x - a = (t-t_0)^s [\varepsilon_0 + \varepsilon_1 (t-t_0) + \varepsilon_2 (t-t_0)^2 + \ldots] \tag{8}$$

mit einem endlichen und von Null verschiedenen Werth für ε_0.

Ist s eine *gerade* Zahl, so wächst x bis der Werth $x = a$ erreicht ist, dann fängt x an abzunehmen, und fährt damit fort, bis

wieder ein Punkt (a', b') erreicht wird, in welchem $\partial H : \partial y$ verschwindet. Hier muss wieder eine ähnliche Untersuchung wie im Punkte (a, b) gemacht werden.

Ist dagegen s eine *ungerade* Zahl, so wird x den Punkt a *passiren* und für $t = t_0$ zu Werthen übergehen, die grösser als a sind. Die Grösse x wächst dann weiter, bis man zu einem neuen Punkt (a'', b'') kommt, wo $\partial H : \partial y$ verschwindet, und wieder eine ähnliche Untersuchung gemacht werden muss.

Die obigen Auseinandersetzungen erleiden eine Ausnahme, wenn s unendlich gross ist. In diesem Fall hat $H - C$ den Factor $x - a$, und die Bahncurve besitzt dann einen isolirten Zweig, nämlich die gerade Linie $x = a$.

Wir gehen jetzt zum zweiten Fall über, dass nämlich der *Coëfficient A_{10} verschwindet.* Dann ist für $x = a$, $y = b$, $\partial H : \partial x = 0$, so dass man gleichzeitig hat

$$0 = H - C = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y}. \tag{9}$$

Wird x und y aus den zwei letzten Gleichungen eliminirt und in die erste Gleichung eingesetzt, so findet man, dass solche Punkte nur für ganz bestimmte Werthe der Constante C auftreten können. *Diese Werthe von C können deswegen als die singulären Punkte der gegebenen Differentialgleichungen angesehen werden.* Die Aufsuchung dieser singulären Punkte geschieht mit Hilfe der Gleichungen (9).

Wie gestaltet sich die Bewegung in der Nähe dieser Punkte?

Wir werden finden, dass bei diesen Werthen der Integrationsconstante C immer Limitation auftreten muss. Die durch (9) bestimmten Punkte (x, y) können bei der Bewegung niemals überschritten werden.

In der Umgebung des Punktes (a, b) haben wir nun die Entwickelungen:

$$(10)\quad \begin{cases} 0 = H - C = A_{20}(x-a)^2 + A_{11}(x-a)(y-b) + A_{02}(y-b)^2 \\ \qquad + A_{30}(x-a)^3 + A_{21}(x-a)^2(y-b) + A_{12}(x-a)(y-b)^2 \\ \qquad + A_{03}(y-b)^3 + \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(11)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y} = A_{11}(x-a) + 2A_{02}(y-b) \\ \qquad + A_{21}(x-a)^2 + 2A_{12}(x-a)(y-b) + 3A_{03}(y-b)^2 + \\ \qquad + \cdots\cdots\end{cases}$$

Die rechte Seite dieses Ausdruckes soll als eine Function von $x - a$ dargestellt werden.

Zu diesem Zwecke nehmen wir zuerst an, dass die Lösung von (10) folgende Form hat:

$$(11^*) \qquad y - b = \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)^3 + \cdots.$$

Wir bekommen dann aus (10) folgende Formel zur Berechnung der Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

$$A_{20} + A_{11}\alpha_1 + A_{02}\alpha_1^2 = 0,$$

$$(A_{11} + 2A_{02}\alpha_1)\alpha_2 = - A_{30} - A_{21}\alpha_1 - A_{12}\alpha_1^2 - A_{03}\alpha_1^3$$

und allgemein

$$(A_{11} + 2A_{02}\alpha_1)\alpha_r = \Phi_r \qquad (r = 2, 3, 4, \ldots),$$

wo Φ_r eine bekannte Function von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ ist.

Um aus der ersten dieser Gleichungen einen reellen Werth von α_1 zu erhalten, ist erforderlich, dass die Ungleichheit

$$A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02} \geqq 0$$

erfüllt ist. Um *endliche* Werthe für α_1 zu erhalten, ist ausserdem nothwendig, dass die Coëfficienten A_{02} und A_{11} nicht gleichzeitig verschwinden. Beide Bedingungen sind also erfüllt, wenn angenommen wird, dass

$$(12) \qquad A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02} > 0$$

ist.

Um endliche Werthe für $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$ zu erhalten, ist erforderlich, dass

$$A_{11} + 2A_{02}\alpha_1$$

von Null verschieden ist. Man hat aber

$$A_{11} + 2A_{02}\alpha_1 = \pm\sqrt{A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02}}$$

und es genügt also, dass die Ungleichheit (12) erfüllt ist, um reelle und endliche Werthe der Coëfficienten in der Reihe (11*) zu erhalten.

Wird nun die Reihe (11*) in (11) eingesetzt, bekommt man

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} = A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \ldots,$$

wo $A_1 = A_{11} + 2A_{02}\alpha_1 = \sqrt{A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02}}$ *und also von Null verschieden ist.* Hieraus erhält man

$$\frac{dx}{x-a}\left(B_1 + B_2(x-a) + B_3(x-a)^2 + \ldots\right) = dt$$

und also nach der Integration

$$B_1 \log(x-a) + B_2(x-a) + \tfrac{1}{2}B_3(x-a)^2 + \ldots = t - t_0,$$

welche Gleichung zeigt, dass x nicht den Werth a erreichen kann für einen endlichen Werth von t.

Hier tritt somit *Limitation* auf.

Wir kommen also zunächst zum Fall, dass

$$A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02} = 0 \tag{13}$$

ist. Man hat dann

$$A_{20}(x-a)^2 + A_{11}(x-a)(y-b) + A_{02}(y-b)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{A_{20}}(x-a) + \sqrt{A_{02}}(y-b)\right)^2.$$

In diesem Falle ist es angemessen, eine neue Veränderliche

$$\xi = \sqrt{A_{20}}(x-a) + \sqrt{A_{02}}(y-b)$$

statt $x - a$ einzuführen. Wir bekommen dann, für $A_{20} \neq 0$,

$$0 = H - C = \xi^2 + B_{30}\,\xi^3 + B_{21}\,\xi^2 (y-b) + B_{12}\,\xi (y-b)^2 + B_{03}(y-b)^3 + \ldots,$$

wenn nicht etwa A_{20} und A_{02} beide verschwinden, in welchem Falle diese Substitution nicht erlaubt ist. Um die noch möglichen Bewegungsformen aufzusuchen, werden wir uns auf die bekannten Untersuchungen von PUISEUX über die algebraischen Functionen stützen.

Wir nehmen an, dass

$$(x-a)^p$$

die niedrigste Potenz von $x - a$ ist, die in H vorkommt, und dass ebenfalls

$$(y-b)^q$$

die niedrigste Potenz von $y - b$ ist in dieser Entwickelung. Wir betrachten irgend eine der PUISEUX'schen Classen

$$K = A(x-a)^p + \sum A_r (x-a)^{p_r} (y-b)^{q_r} + B(y-b)^q,$$

wo die Ungleichheiten

$$(14) \qquad \begin{cases} p > p_1 > p_2 > \cdots, \\ q_1 < q_2 < \cdots < q \end{cases}$$

erfüllt werden müssen. Es ist zu bemerken, dass sowohl A wie B gleich Null sein können.

Setzt man

$$(14^*) \qquad y - b = (x-a)^\mu,$$

so müssen, weil alle Glieder in K derselben Classe — μ — angehören,

$$(15) \qquad p = p_1 + q_1\mu = p_2 + q_2\mu = \ldots = q\mu$$

sein, vorausgesetzt nämlich, dass sowohl A wie B nicht verschwindet. Würde $A(x-a)^p$ nicht der Classe angehören, so würde das erste

Glied in (15) verschwinden; würde $B(y-b)^q$ nicht vorkommen, verschwände das letzte Glied.

Da

$$p_1 + q_1\mu = p_2 + q_2\mu,$$

so ist

$$\mu = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1},$$

so dass μ immer *positiv* ist.

Ein beliebiges Glied in K

$$A_f(x-a)^{p_f}(y-b)^{q_f}$$

gibt in $\partial H : \partial y$ ein Glied

$$q_f A_f(x-a)^{p_f}(y-b)^{q_f - 1}$$

oder nach Einsetzung von (14*)

$$q_f A_f(x-a)^{p_f + \mu(q_f - 1)}.$$

Der Exponent eines beliebigen Gliedes in $\partial H : \partial y$ ist also immer grösser als die Einheit. Eine Ausnahme könnte nur entstehen, wenn die betrachtete Classe nur die Glieder

$$A(x-a)^p + B(y-b)^q$$

enthält. Die Ordnung des letzten Gliedes ist μq, und die Ordnung des entsprechenden Gliedes in $\partial H : \partial y$ ist also $(q-1)\mu$. Nun ist aber in diesem Falle

$$\mu = \frac{p}{q},$$

und folglich ist

$$(q-1)\mu = p\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Wir müssen uns aber erinnern, dass nur solche Werthe von p und q hier zu berücksichtigen sind, die grösser oder gleich 2 sind. Folglich ist

$$1 - \frac{1}{q} \geqq \frac{1}{2}$$

und

$$p\left(1 - \frac{1}{q}\right) \geqq 1 .$$

Die Ordnung eines beliebigen Gliedes in $\partial H : \partial y$ ist also gleich eins oder grösser. Wir können also setzen

$$\frac{dx}{dt} = a_1 (x - a)^{\lambda_1} + a_2 (x - a)^{\lambda_2} + a_3 (x - a)^{\lambda_3} + \ldots ,$$

wo

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

und $\lambda_1 \geqq 1$ ist. In der Umgebung des Werthes $x = a$ können wir somit die Differentialgleichung für x in der Form

$$dt = \frac{dx}{(x - a)^{\lambda_1}} [b_0 + b_1 (x - a)^{\mu_1} + b_2 (x - a)^{\mu_2} + \ldots]$$

schreiben, wo $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ und μ_1 positiv ist.

Das Integral lautet

$$(16) \quad \begin{cases} t + \text{Constans} = \dfrac{1}{(x - a)^{\lambda_1 - 1}} \left[\dfrac{b_0}{1 - \lambda_1} + \dfrac{b_1}{\mu_1 + 1 - \lambda_1} (x - a)^{\mu_1} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{b_2}{\mu_2 + 1 - \lambda_1} (x - a)^{\mu_2} + \ldots \right]. \end{cases}$$

Wäre $\lambda_1 = 1$, so würde das Integral die Form

$$(16^*) \quad t + \text{Constans} = b_0 \log (x - a) + \frac{b_1}{\mu_1} (x - a)^{\mu_1} + \frac{b_2}{\mu_2} (x - a)^{\mu_2} + \ldots$$

annehmen.

Im einen Falle wie im anderen findet man, dass *x den Werth a nicht für einen endlichen Werth von t erreichen kann.*

Es tritt also *Limitation* auf.

Wir können in diesem Falle, *mutatis mutandis*, dieselben Betrachtungen auch für die Differentialgleichungen für y durchführen, so dass folglich gleichzeitig Limitation sowohl in x wie in y auftreten muss.

Ist die Function H nebst ihren Ableitungen eine einwerthige Function von x und y, so kann die Bahncurve nicht sich selbst schneiden, vorausgesetzt, dass C nicht einen singulären Werth hat. In jedem Punkt (x_0, y_0) ist in der That $dx:dt$ und $dy:dt$ völlig bestimmt: kommt man, nachdem man eine geschlossene Curve beschrieben hat, zu demselben Punkt (x_0, y_0) zurück, so wird man wieder in die alte Curve eingelenkt und die Bewegung ist dann periodisch. Würde die Bahncurve einen Doppelpunkt besitzen, so wäre in demselben

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

und die Constante C würde dann nach (9) einen singulären Werth haben, was gegen die Voraussetzung ist.

Es ist wohl zu bemerken, dass hier vorausgesetzt wird, dass die canonischen Coordinaten x und y Cartesius'sche Coordinaten eines Punktes bezeichnen. Unter Anwendung anderer Coordinatensysteme oder anderer Coordinaten kann es sich wohl ereignen, dass die Bahncurve Doppeltpunkte oder andere Singularitäten aufweisen kann.

Wir können die obigen Auseinandersetzungen über Bewegungen, die einen Freiheitsgrad besitzen, in folgendem Theorem zusammenfassen.

Theorem: Wenn x und y reelle Veränderliche bezeichnen, welche durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{17}$$

mit dem Integrale

$$H(x, y) = C, \tag{17*}$$

bestimmt sind, und wenn H eine einwerthige Function ist, die in jedem reellen Punkte (a, b) nach den positiven Potenzen von $x - a$ und $y - b$ entwickelt werden kann, so ist die Natur der vom Punkte (x, y) beschriebenen Bahncurve vom Werthe der Constante C abhängig; solche Werthe von C, die man aus (17) erhält, wenn man x und y aus den Gleichungen*

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 = \frac{\partial H}{\partial y} \tag{18}$$

berechnet, sind als singuläre Werthe von C zu betrachten; hat C einen solchen singulären Werth, so nähert sich, mit wachsendem t, der Punkt (x, y) asymptotisch einem Grenzpunkt (α, β), ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen; hat C keinen solchen singulären Werth, so ist die Bahncurve entweder eine geschlossene Curve, die vom Punkte (x, y) in endlicher Zeit beschrieben wird, oder es müssen die Grössen x und y — die eine oder beide — mit wachsendem t ins Unendliche wachsen oder abnehmen.

§ 3. Entwickelung der Störungsfunction im asteroidischen Dreikörper-Problem.

Im § 13 des neunten Abschnitts haben wir die Differentialgleichungen für das asteroidische Dreikörper-Problem im Raum in folgender Form erhalten:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d x_i'}{d t} &= \frac{\partial F}{\partial y_i'}, \\ \frac{d y_i'}{d t} &= -\frac{\partial F}{\partial x_i'}, \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

wo

$$F = \frac{1}{2 x_1'^2} + N x_3' + \frac{\mu}{\Delta} - \mu(q_1 \cos N t + q_2 \sin N t) \tag{1*}$$

ist, und N die mittlere Bewegung des störenden Planeten („Jupiter") bezeichnet. In Bezug auf die übrigen Bezeichnungen verweise ich auf den betreffenden Paragraphen.

Die Störungsfunction F lässt sich, wie an citirter Stelle bewiesen wurde, in eine Fourier'sche Reihe nach den Cosinus der Vielfachen von y_1', y_2' und y_3' entwickeln. Die Coëfficienten in dieser Reihe sind Functionen von x_1', x_2' und x_3'.

Zur Erhaltung der Coëfficienten in dieser Reihe werde ich mich der von Leverrier im ersten Band der Pariser Annalen gegebenen Entwickelung bedienen.

In den LEVERRIER'schen Bezeichnungen ausgedrückt, hat man

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1' = \lambda - \omega, \\ y_2' = \omega - \Omega, \\ y_3' = \Omega - l'. \end{cases}$$

Ich werde nur die Glieder bis zum vierten Grade in den Excentricitäten und bis zum zweiten Grade der Neigung hier berücksichtigen.

Die Argumente, die hier vorkommen, haben, durch die Winkelgrössen y_1', y_2' und y_3' ausgedrückt, folgende Form:

$$\begin{aligned} i(\lambda - l') &= i(y_1' + y_2' + y_3'), \\ (i-1)\lambda + \omega - il' &= i(y_1' + y_2' + y_3') - y_1', \\ (i-2)\lambda + 2\omega - il' &= i(y_1' + y_2' + y_3') - 2y_1', \\ (i-2)\lambda + 2\tau' - il' &= i(y_1' + y_2' + y_3') - 2(y_1' + y_2'), \\ (i-3)\lambda + 3\omega - il' &= i(y_1' + y_2' + y_3') - 3y_1', \\ (i-4)\lambda + 4\omega - il' &= i(y_1' + y_2' + y_3') - 4y_1'. \end{aligned}$$

Für die LAPLACE'schen Coëfficienten, welche in der Entwickelung der Störungsfunction vorkommen, wollen wir eine etwas andere Bezeichnung als in VI § 5 einführen, um Uebereinstimmung mit LEVERRIER zu erhalten. Wir setzen nämlich

$$(3)\qquad \begin{cases} A_i = A^{(i)} \\ B_i = B^{(i)}, \end{cases}$$

wo A_i und B_i durch die Reihen (1) des citirten Paragraphen definirt sind. Man hat also, da $\alpha' = 1$ ist,

$$\frac{1}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi]^{1/2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(i)} \cos i\varphi,$$

$$\frac{\alpha}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi]^{3/2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(i)} \cos i\varphi.$$

Weiter setzen wir mit LEVERRIER

(3*)
$$A_s^{(i)} = \frac{\alpha^s}{\underline{|s}} \frac{d^s A^{(i)}}{d\alpha^s}.$$

Schreibt man

$$F = F_0 + F_1 + F_2,$$

wo

$$F_0 = \frac{1}{2x_1'^2} + Nx_3',$$

$$F_1 = \frac{\mu}{\Delta},$$

$$F_2 = -\mu(q_1 \cos Nt + q_2 \sin Nt)$$

ist, so erhält man F_2, wenn man in den LEVERRIER'schen Entwickelungen für

$$R_{(0,1)} - R_1$$

$e' = 0$ und $a' = 1$ setzt.

Wir erhalten somit

(4)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}F_2 = &\left(-\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha e^2+\alpha\eta^2+\frac{\alpha}{64}e^4\right)\cos(y_1'+y_2'+y_3') \\
&+ \tfrac{3}{2}\alpha e \cos(y_1'+y_2'+y_3'-y_1') \\
&+ (-\tfrac{1}{2}\alpha e + \tfrac{3}{8}\alpha e^3)\cos(y_1'+y_2'+y_3'+y_1') \\
&- \left(\tfrac{1}{8}\alpha e^2 + \frac{\alpha}{24}e^4\right)\cos(y_1'+y_2'+y_3'-2y_1') \\
&+ (-\tfrac{3}{8}\alpha e^2 + \tfrac{3}{8}\alpha e^4)\cos(y_1'+y_2'+y_3'+2y_1') \\
&- \alpha\eta^2\cos(y_1'+y_2'+y_3'-2(y_1'+y_2')) \\
&- \tfrac{1}{24}\alpha e^3\cos(y_1'+y_2'+y_3'-3y_1') \\
&- \tfrac{1}{3}\alpha e^3\cos(y_1'+y_2'+y_3'+3y_1') \\
&- \tfrac{3}{128}\alpha e^4\cos(y_1'+y_2'+y_3'-4y_1') \\
&- \tfrac{125}{384}\alpha e^4\cos(y_1'+y_2'+y_3'+4y_1').
\end{aligned}\right.$$

Hier hat man

(5)
$$\eta^2 = \sin^2\frac{J}{2}$$

gesetzt, wo J die Neigung der Asteroidenbahn gegen die Jupiterbahn bedeutet.

Für F_1 erhalten wir aus den Leverrier'schen Entwickelungen folgende Form:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}F_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Big[& \tfrac{1}{2}A^{(i)} + (-2i^2A^{(i)} + A_1^{(i)} + A_2^{(i)})\left(\frac{e}{2}\right)^2 \\
& + (\tfrac{1}{8}(-9i^2+16i^4)A^{(i)} - i^2A_1^{(i)} - 2i^2A_2^{(i)} + 3A_3^{(i)} + 3A_4^{(i)})\left(\frac{e}{2}\right)^4 \\
& \qquad - \tfrac{1}{4}(B^{(i-1)} + B^{(i+1)})\eta^2\Big] \cos i(y_1'+y_2'+y_3') \\
+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \Big[& (-2iA^{(i)} - A_1^{(i)})\frac{e}{2} \\
& + ((i-5i^2+4i^3)A^{(i)} + \tfrac{1}{2}(3-7i+4i^2)A_1^{(i)} + (-2-2i)A_2^{(i)} \\
& - 3A_3^{(i)})\left(\frac{e}{2}\right)^3\Big] \\
& \qquad \times \cos(i(y_1'+y_2'+y_3') - y_1')\Big] \\
+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \Big[& (\tfrac{1}{2}(-5i+4i^2)A^{(i)} + (-1+2i)A_1^{(i)} + A_2^{(i)})\left(\frac{e}{2}\right)^2 \\
& + (\tfrac{1}{3}(11i-32i^2+30i^3-8i^4)A^{(i)} + \tfrac{1}{3}(8-23i+24i^2 \\
& - 8i^3)A_1^{(i)} + (-4+3i)A_2^{(i)} + 4iA_3^{(i)} + 4A_4^{(i)})\left(\frac{e}{2}\right)^4\Big] \\
& \qquad \times \cos(i(y_1'+y_2'+y_3') - 2y_1') \\
+ \sum_{-\infty}^{+\infty} & \tfrac{1}{2}B^{(i-1)}\eta^2 \cos(i(y_1'+y_2'+y_3') - 2(y_1'+y_2')) \\
+ \sum_{-\infty}^{+\infty} [& \tfrac{1}{3}(-13i+15i^2-4i^3)A^{(i)} + \tfrac{1}{2}(-3+9i-4i^2)A_1^{(i)} \\
& + (2-2i)A_2^{(i)} - A_3^{(i)}]\left(\frac{e}{2}\right)^3 \\
& \qquad \times \cos(i(y_1'+y_2'+y_3') - 3y_1) \\
+ \sum_{-\infty}^{+\infty} [& \tfrac{1}{24}(-206i+283i^2-120i^3+16i^4)A^{(i)} \\
& + \tfrac{1}{6}(-16+59i-42i^2+8i^3)A_1^{(i)} \\
& + \tfrac{1}{2}(8-13i+4i^2)A_2^{(i)} \\
& + (-3+2i)A_3^{(i)} + A_4^{(i)}]\left(\frac{e}{2}\right)^4 \cos(i(y_1'+y_2'+y_3') - 4y_1).
\end{aligned}
$$

Ich werde indessen die Entwickelung der Störungsfunction nicht in dieser Form benutzen, sondern zuerst eine Transformation der Coordinaten vornehmen. Es ist nämlich wünschenswerth, statt x_2' und x_3' andere Coordinaten einzuführen, so dass die Störungsfunction nach Potenzen derselben entwickelt werden kann. Wir haben in VI § 1 gesehen, wie dies im allgemeinen Dreikörper-Problem erreicht werden kann.

Hier genügt es zu setzen:

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = x_1', & x_2 = \quad x_1' - x_2', \quad x_3 = x_2' - x_3', \\ y_1 = y_1' + y_2' + y_3'; & y_2 = - y_2' - y_3', \quad y_3 = - y_3', \end{cases}$$

so dass also die neuen Veränderlichen in folgender Weise durch die elliptischen Elemente ausgedrückt werden:

$$(6^*)\quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{a}, & y_1 = l + \pi - Nt, \\ x_2 = \sqrt{a}(1 - \sqrt{1-e^2}), & y_2 = - \pi + Nt, \\ x_3 = \sqrt{a(1-e^2)}(1 - \cos J), & y_3 = - \Omega + Nt. \end{cases}$$

Die Störungsfunction lässt sich dann als eine Reihe nach den positiven Potenzen von x_3 und $\sqrt{x_2}$ ausdrücken.

Man hat nach den obigen Relationen

$$(7)\quad \begin{cases} e^2 = \dfrac{2x_2}{\sqrt{a}} - \dfrac{x_2^2}{a}, \\ \eta^2 = \dfrac{x_3}{2\sqrt{a(1-e^2)}}, \end{cases}$$

welche Werthe wir in die Entwickelung der Störungsfunction einzuführen haben.

Setzen wir

$$(7^*)\quad s^2 = \frac{x_2}{2\sqrt{a}} = \frac{x_2}{2x_1},$$

und brechen mit der vierten Potenz von s ab, haben wir also

$$\frac{e}{2} = \varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3,$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = \varepsilon^2 - \varepsilon^4,$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^3 = \varepsilon^3,$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^4 = \varepsilon^4.$$

Indem wir uns auf die Bewegung in *einer Ebene* (der Ebene der Jupiterbahn) beschränken, können wir nun die Entwickelung der Störungsfunction in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} F = {} & \mu \sum_{-\infty}^{+\infty} P_0^{(i)} \cos i y_1 \\ & + \mu \sum_{-\infty}^{+\infty} P_1^{(i)} \cos [i y_1 - \overline{y_1 + y_2}] \\ & + \mu \sum_{-\infty}^{+\infty} P_2^{(i)} \cos [i y_1 - 2(y_1 + y_2)] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

oder kurz:

$$F = \mu \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(i)} \cos [i y_1 - s(y_1 + y_2)], \tag{8}$$

wo die Coëfficienten $P_s^{(i)}$ in folgender Weise von x_2 und x_1 $(=\sqrt{a})$ abhängen.

F ü r $s = 0$ h a t m a n:

$$\begin{aligned} P_0^{(i)} = {} & \tfrac{1}{2} A^{(i)} + (-2 i^2 A^{(i)} + A_1^{(i)} + A_2^{(i)}) \varepsilon^2 \\ & + \left(\tfrac{1}{8}(7 i^2 + 16 i^4) A^{(i)} - (i^2 + 1) A_1^{(i)} - (2 i^2 + 1) A_2^{(i)} + 3 A_3^{(i)} + 3 A_4^{(i)}\right) \varepsilon^4, \end{aligned}$$

mit folgenden *Ausnahmen:*

Für $i = 0$:

$$\mu P_0^{(0)} = \frac{1}{2x_1^2} + N(x_1 - x_2)$$
$$+ \mu\left[\tfrac{1}{2} A^{(0)} + (A_1^{(0)} + A_2^{(0)}) \varepsilon^2\right.$$
$$\left. + (- A_1^{(0)} - A_2^{(0)} + 3A_3^{(0)} + 3A_4^{(0)}) \varepsilon^4\right].$$

Für $i = 1$ *und* $i = -1$:

$$P_0^{(-1)} = P_0^{(1)} = \tfrac{1}{2} A^{(1)} - \tfrac{1}{2}\alpha + (\alpha - 2A^{(1)} + A_1^{(1)} + A_2^{(1)}) \varepsilon^2$$
$$+ (-\tfrac{7}{8}\alpha + \tfrac{23}{8} A^{(1)} - 2A_1^{(1)} - 3A_2^{(1)} + 3A_3^{(1)} + 3A_4^{(1)}) \varepsilon^4.$$

Für $s = 1$ hat man:

$$P_1^{(i)} = (-2iA^{(i)} - A_1^{(i)}) \varepsilon$$
$$+ \left((2i - 5i^2 + 4i^3)A^{(i)} + \tfrac{1}{2}(4 - 7i + 4i^2)A_1^{(i)} + (-2 - 2i)A_2^{(i)} - 3A_3^{(i)}\right) \varepsilon^3,$$

mit den *Ausnahmen:*

Für $i = +1$:

$$P_1^{(1)} = (3\alpha - 2A^{(1)} - A_1^{(1)}) \varepsilon$$
$$+ (-\tfrac{3}{2}\alpha + A^{(1)} + \tfrac{1}{2}A_1^{(1)} - 4A_2^{(1)} - 3A_3^{(1)}) \varepsilon^3.$$

Für $i = -1$:

$$P_1^{(-1)} = (-\alpha + 2A^{(1)} - A_1^{(1)}) \varepsilon$$
$$+ (\tfrac{7}{2}\alpha - 11A^{(1)} + \tfrac{15}{2}A_1^{(1)} - 3A_3^{(1)}) \varepsilon^3.$$

Für $s = 2$ hat man:

$$P_2^{(i)} = \left(\tfrac{1}{2}(-5i + 4i^2)A^{(i)} + (-1 + 2i)A_1^{(i)} + A_2^{(i)}\right) \varepsilon^2$$
$$+ \left(\tfrac{1}{3}(\tfrac{37}{2}i - 38i^2 + 30i^3 - 8i^4)A^{(i)} + \tfrac{1}{3}(11 - 29i + 24i^2 - 8i^3)A_1^{(i)}\right.$$
$$\left. + (-5 + 3i)A_2^{(i)} + 4iA_3^{(i)} + 4A_4^{(i)}\right) \varepsilon^4,$$

mit den *Ausnahmen:*

Für $i = +1$:

$$P_2^{(1)} = \left(-\frac{\alpha}{2} - \tfrac{1}{2}A^{(1)} + A_1^{(1)} + A_2^{(1)}\right) \varepsilon^2$$
$$+ \left(-\frac{\alpha}{6} + \tfrac{5}{6}A^{(1)} - \tfrac{2}{3}A_1^{(1)} - 2A_2^{(i)} + 4A_3^{(1)} + 4A_4^{(1)}\right) \varepsilon^4.$$

Für $i = -1$:

$$P_2^{(-1)} = \left(-\frac{3\alpha}{2} + \tfrac{9}{2}A^{(1)} - 3A_1^{(1)} + A_2^{(1)}\right)\varepsilon^2$$
$$+ \left(\frac{15\alpha}{2} - \tfrac{63}{2}A^{(1)} + 24A_1^{(1)} - 8A_2^{(1)} - 4A_3^{(1)} + 4A_4^{(1)}\right)\varepsilon^4.$$

Für $s = 3$ hat man:

$$P_3^{(i)} = [\tfrac{1}{3}(-13i + 15i^2 - 4i^3)A^{(i)} + \tfrac{1}{2}(-3 + 9i - 4i^2)A_1^{(i)}$$
$$+ (2 - 2i)A_2^{(i)} - A_3^{(i)}]\,\varepsilon^3,$$

mit den *Ausnahmen:*

Für $i = +1$:

$$P_3^{(1)} = (-\tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{2}{3}A^{(1)} + A_1^{(1)} - A_3^{(1)})\,\varepsilon^3.$$

Für $i = -1$:

$$P_3^{(-1)} = (-\tfrac{8}{3}\alpha + \tfrac{32}{3}A^{(1)} - 8A_1^{(1)} + 4A_2^{(1)} - A_3^{(1)})\,\varepsilon^3.$$

Für $s = 4$ hat man:

$$P_4^{(i)} = [\tfrac{1}{24}(-206i + 283i^2 - 120i^3 + 16i^4)A^{(i)}$$
$$+ \tfrac{1}{6}(-16 + 59i - 42i^2 + 8i^3)A_1^{(i)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(8 - 13i + 4i^2)A_2^{(i)}$$
$$+ (-3 + 2i)A_3^{(i)} + A_4^{(i)}]\,\varepsilon^4$$

mit den *Ausnahmen:*

Für $i = +1$:

$$P_4^{(1)} = \left[-\frac{3\alpha}{8} - \tfrac{9}{8}A^{(1)} + \tfrac{3}{2}A_1^{(1)} - \tfrac{1}{2}A_2^{(1)} - A_3^{(1)} + A_4^{(1)}\right]\varepsilon^4.$$

Für $i = -1$:

$$P_4^{(-1)} = \left[-\frac{125\alpha}{24} + \tfrac{625}{24}A^{(1)} - \tfrac{125}{6}A_1^{(1)} + \tfrac{25}{2}A_2^{(1)} - 5A_3^{(1)} + A_4^{(1)}\right]\varepsilon^4.$$

Die Coëfficienten $A_s^{(i)}$ hängen nur von α, d. h. von $x_1 (=\sqrt{a})$ ab. Es ist

$$\frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial x_1} = 2x_1 \frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial \alpha}.$$

Nach der Definition (3*) hat man aber

$$\alpha \frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial \alpha} = s A_s^{(i)} + (s+1) A_{s+1}^{(i)},$$

so dass

$$x_1 \frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial x_1} = 2s A_s^{(i)} + 2(s+1) A_{s+1}^{(i)} \tag{9}$$

ist.

Will man die Störungen bis zum vierten Grade berücksichtigen, so muss man die Grössen $A_s^{(i)}$ für $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ berechnen.

Die Grösse ε hängt von x_1 und x_2 ab. Ihre partiellen Ableitungen lauten

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{2x_1 x_2}} = \frac{1}{4x_1 \varepsilon}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} &= -\frac{\varepsilon}{2x_1}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die Ableitungen von ε nach x_2 enthalten also ε im Nenner. Dies kann unter Umständen Schwierigkeiten verursachen, wenn man nämlich im DELAUNAY'schen Problem Glieder 1ten Grades berücksichtigen muß. Man vermeidet diese Schwierigkeiten, wenn man in analoger Weise wie in VI § 1 neue Coordinaten einführt.

In Bezug auf die Coëfficienten $A_s^{(-i)}$ ist zu bemerken, dass

$$A_s^{(-i)} = A_s^{(i)}$$

ist. Auf die Methoden zur numerischen Berechnung dieser Grössen gehe ich hier nicht ein. LEVERRIER hat in seinen Untersuchungen ausführliche Vorschriften darüber gegeben, die indessen in einigen Beziehungen vereinfacht werden können. Es ist besonders wünschenswerth, vollständigere Methoden zur Controlle der Rechnungen einzuführen.

§ 4. Das DELAUNAY'sche Problem.

In seiner berühmten *„Théorie du mouvement de la lune"* hat DELAUNAY eine neue und geniale Methode eingeführt, um zu den Integralen des Problems der drei Körper zu gelangen. Sie besteht

wesentlich in der Einführung einer neuen intermediären Bahn statt der KEPLER'schen Ellipse. Durch Variation der Elemente dieser intermediären Bahn — oder richtiger einer Reihe solcher intermediären Bahnen — gelangt DELAUNAY zu einer rein trigonometrischen Form für die Coordinaten im Mondprobleme. Wir werden in einem folgenden Paragraphen auf diese Frage zurückkommen, hier wollen wir zuerst die rein mathematische Behandlung des Problems voraussenden.

Die reellen Grössen x_1, x_2, y_1 y_2 seien durch folgende Differentialgleichungen bestimmt:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_1}, & \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_2}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_2}, \end{cases}$$

wo F die Form

$$(1^*) \qquad F = \Phi + \sum A_i \cos i y_1$$

hat, in welchem Ausdrucke Φ, A_1, A_2, ... gegebene Functionen von x_1, x_2 sind, die in jedem Punkt (a, b) innerhalb eines gewissen Gebietes nach den positiven Potenzen von $x_1 - a$ und $x_2 - b$ entwickelt werden können. Die Aufgabe, die Werthänderungen von x_1, x_2, y_1, y_2 aufzusuchen, werde ich das *DELAUNAY'sche Problem* nennen.

Da F von y_2 unabhängig ist, so findet man zuerst, dass $dx_2 : dt = 0$ ist, so dass also

$$(2) \qquad x_2 = \text{Constans}$$

ist. Die Aufgabe ist also thatsächlich auf die Betrachtung der Gleichungen

$$(2^*) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1}$$

reducirt, ein Problem, das wir mit den Methoden des vorigen Paragraphen lösen können. Wir müssen nur in Betracht ziehen, dass F einen Parameter — x_2 — enthält, so dass die singulären Punkte,

die wir zu betrachten haben, thatsächlich als *singuläre Curven* auftreten werden.

Unser erstes Problem ist also, diese singulären Curven aufzusuchen. Nach dem Theorem im vorigen Paragraphen erhält man dieselben, wenn man x_1 und y_1 mittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 = \frac{\partial F}{\partial y_1} \tag{3}$$

eliminirt und die Werthe in die Gleichung

$$C = \Phi + \sum A_i \cos i y_1 \tag{3*}$$

einsetzt.

Ohne die specielle Form der Functionen Φ, A_1, A_2, A_3, ..., zu kennen, kann man gewisse allgemeine Betrachtungen über das Eliminationsresultat anstellen. Die zweite Gleichung (3) lautet nämlich

$$0 = A_1 \sin y_1 + 2 A_2 \sin 2 y_1 + 3 A_3 \sin 3 y_1 + \dots \tag{4}$$

und man findet gleich, dass diese Gleichung die Wurzeln $y_1 = 0$ und $y_1 = \pi$ hat. Wenn noch andere Wurzelwerthe für y_1 vorkommen können, so müssen sie die Gleichung befriedigen, welche man erhält, indem man (4) mit $\sin y_1$ dividirt.

Man leitet indessen leicht folgende Relationen ab:

$$\frac{\sin 2 i y}{\sin y} = 2 (\cos y + \cos 3 y + \cos 5 y + \dots + \cos (2 i - 1) y),$$

$$\frac{\sin (2 i - 1) y}{\sin y} = 1 + 2 \cos 2 y + 2 \cos 4 y + \dots + 2 \cos (2 i - 2) y.$$

und folglich hat man

$$\left\{\begin{aligned} \sum i A_i \frac{\sin i y_1}{\sin y_1} = {} & A_1 + 3 A_3 + 5 A_5 + 7 A_7 + \dots \\ & + 2 (2 A_2 + 4 A_4 + 6 A_6 + \dots) \cos y_1 \\ & + 2 (3 A_3 + 5 A_5 + 7 A_7 + \dots) \cos 2 y_1 \\ & + 2 (4 A_4 + 6 A_6 + \dots) \cos 3 y_1 \\ & + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Aus dieser Formel lässt sich häufig leicht beurtheilen, ob andere Wurzeln als 0 und π vorkommen können. In vielen Fällen convergirt die Reihe der A-Coëfficienten so rasch, dass das erste Glied in (5) die Summe der übrigen überragt, in welchem Falle offenbar keine anderen Wurzeln vorkommen können. Ist aber die Convergenz der Reihe (3*) eine schwache, so werden im Allgemeinen andere singuläre Werthe als 0 und π für y_1 auftreten können.

Wir wollen die Wurzeln $y_1 = 0$ und $y_1 = \pi$ etwas näher in Betracht ziehen. Die entsprechenden Werthe für x_1 und C werden aus folgenden Gleichungen erhalten:

$$y_1 = 0,$$

$$(6) \qquad \begin{cases} C = \Phi + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \\ 0 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1} + \dots \end{cases}$$

$$y_1 = \pi,$$

$$(6^*) \qquad \begin{cases} C = \Phi - A_1 + A_2 - A_3 + \dots \\ 0 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1} + \dots \end{cases}$$

Wird x_1 zwischen den beiden Gleichungen (6) eliminirt, so bekommt man eine Relation — $D_1(x_2, C) = 0$ — zwischen x_2 und C, welche die Gleichung für die zu $y_1 = 0$ gehörende singuläre Curve giebt. Aus (6*) erhält man in gleicher Weise die Gleichung $D_2(x, C) = 0$. Das Eliminationsresultat zwischen einer Function und ihren abgeleiteten Functionen nennt man die *Discriminante* der Function. Die Functionen D_1 und D_2 sind also die Discriminanten der charakteristischen Function F für $y_1 = 0$ und $y_1 = \pi$, welche Discriminanten häufig mit Hilfe der Methoden der Algebra erhalten werden können.

Betrachten wir z. B. den Fall

$$\Phi = a_0 + a_2 x_1^2,$$

$$A_1 = b_1 x_1,$$

wo a_0, a_2 und b_1 gewisse Functionen von x_2 sind und $A_2 = A_3 = \ldots = 0$ angenommen werden, so lauten die Gleichungen für die singulären Curven

$$(7) \quad \begin{cases} 0 = D_1(x_2, C) = b_1^2 - 4(a_0 - C)a_2, \\ 0 = D_2(x_2, C) = b_1^2 - 4(a_0 - C)a_2, \end{cases}$$

so dass in diesem Falle D_1 und D_2 zusammenfallen.

Wäre

$$\Phi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2,$$

$$A_1 = b_1 x_1,$$

so hat man

$$(7^*) \quad \begin{cases} 0 = D_1(x_2, C) = (a_1 + b_1)^2 - 4(a_0 - C)a_2, \\ 0 = D_2(x_2, C) = (a_1 - b_1)^2 - 4(a_0 - C)a_2. \end{cases}$$

Diesen beiden Annahmen über F entsprechen zwei wichtige Fälle im Dreikörper-Problem.

Für etwaige Anwendungen schreibe ich noch nach Salmon („Higher Algebra", S. 306, 1876) die Discriminante hin unter der Voraussetzung, dass F vom vierten Grade in x_1 ist, so dass

$$F = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4$$

ist. Man hat dann

$$D = 4(12 a_0 a_4 - 3 a_1 a_3 + a_2^2)^3 - (72 a_0 a_2 a_4 + 9 a_1 a_2 a_3 \\ - 27 a_1^2 a_4 - 27 a_0 a_3^2 - 2 a_2^3)^2.$$

Liegen die Werthe von C und x_2 auf einer singulären Curve, so entsteht nach dem vorigen Paragraphen immer Limitation. Im Allgemeinen begrenzen die Curven $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ verschiedene Gebiete der Veränderlichen C und x_2, innerhalb welcher besonders charakterisirte Bewegungsverhältnisse auftreten. So kann z. B. in einem Gebiete die Grösse y_1 zwischen zwei endlichen Grenzen periodisch schwanken, in einem anderen wird sie mit t ins Unendliche wachsen. Die singulären Curven spielen also die Rolle von

Discontinuitätscurven, indem nämlich beim Uebergang über eine solche Curve der analytische Ausdruck für die Coordinaten sprungweise in andere Formen übergeht.

Die Darstellung der Coordinaten im Delaunay'schen Problem, als Functionen der Zeit, geschieht im Allgemeinen ziemlich einfach unter Anwendung der Hamilton-Jacobi'schen partiellen Differentialgleichung. Als „q-Coordinaten" kann man je nach den Umständen entweder die y_1 und y_2 oder die x_1 und x_2 benutzen. Im vorigen Falle hat man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} - F\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}, \frac{\partial V}{\partial y_2}\right) = 0 \tag{8}$$

zu betrachten. Da t und y_2 nicht in F vorkommen, so kann man das Integral in folgender Form ansetzen

$$V = Ct + \alpha_2 y_2 + W(y_1), \tag{8*}$$

wo $W(y_1)$ aus der Gleichung

$$F\left(\frac{\partial W}{\partial y_1}, \alpha_2\right) = C \tag{8**}$$

zu bestimmen ist. Hat man ein Integral dieser Gleichung

$$W = W(y_1, \alpha_1, \alpha_2)$$

mit der Integrationsconstante α_1 gefunden, so erhält man die Coordinaten aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, & x_1 &= \frac{\partial W}{\partial y_1}, \\ \beta_2 &= \frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + y_2 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, & x_2 &= \alpha_2. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Aus (1*) und (8*) ist ersichtlich, dass — von den singulären Werthen der Constante C abgesehen — $\partial W : \partial y_1$ eine periodische Function von y ist, und dass W die Form

$$W = B_0 y_1 + 2B_1 \sin y_1 + 2B_2 \sin 2y_1 + 2B_3 \sin 3y_1 + \dots$$

hat. Hier bezeichnet B_0 eine gewisse Function von α_2 und C. Nun ist aber die Wahl der Integrationsconstante α_1 willkürlich; wählt man sie gleich B_0, so nehmen die Gleichungen (9) folgende einfache Form an:

$$(10) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1 = y_1 + 2\sum \dfrac{\partial B_i}{\partial \alpha_1} \sin i y_1, \\ -\dfrac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2 = y_2 + 2\sum \dfrac{\partial B_i}{\partial \alpha_2} \sin i y_1, \end{cases}$$

$$(10^*) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 + 2\sum i B_i \cos i y_1, \\ x_2 = \alpha_2. \end{cases}$$

Einen analytischen Ausdruck für die Coëfficienten B_i findet man leicht. Man hat thatsächlich

$$(11) \qquad i B_i = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x_1 \cos i y_1 \, d y_1,$$

wo der Werth von x_1 aus der Gleichung

$$F(x_1, \alpha_2) = C$$

einzusetzen ist. Für $i = 0$ hat man

$$(11^*) \qquad B_0 = \alpha_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x_1 \, d y_1,$$

durch welche Relation α_1, α_2 und C mit einander verbunden sind.

Das Delaunay'sche Problem ist hiermit, wenigstens für nichtsinguläre Werthe von C, vollständig gelöst.

Würde man x_1 und x_2 als „q-Coordinaten" benutzen, was in diesem Probleme im Allgemeinen vorzuziehen ist, so gestaltet sich die Lösung folgendermassen:

Die HAMILTON-JACOBI'sche Differentialgleichung nimmt die Form

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + F\left(x_1, x_2; \frac{\partial V'}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{12}$$

an, und folglich können wir

$$V = C' t + \alpha_2' \varphi(x_2) + W'$$

setzen, wo φ eine willkürliche Function von x_2 bezeichnet und W aus der Gleichung

$$F\left(x_1, x_2, \frac{\partial W'}{\partial x_1}\right) = - C' \tag{12*}$$

bestimmt wird. Wir wählen am einfachsten $\varphi(x_2) = x_2$, so dass

$$V' = C' t + \alpha_2' x_2 + W' \tag{12**}$$

ist. Die Gleichung (12*) hat nach (1*) die Form

$$\Phi(x_1, x_2) + \sum A_i \cos i \frac{\partial W'}{\partial x_1} = - C'. \tag{13}$$

Wir denken uns diese Gleichung nach $\partial W : \partial x_1$ aufgelöst, so dass man hat:

$$\frac{\partial W'}{\partial x_1} = K(x_1, x_2, \alpha_1'), \tag{14}$$

wo α_1' eine vorläufig unbestimmte Function von C und x_2 bezeichnet.

Die Integrale der Gleichungen (1) werden nunmehr aus den Relationen

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_1' &= \frac{\partial V'}{\partial \alpha_1'} = \frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} t + \frac{\partial W'}{\partial \alpha_1'}, \\ \gamma_2' &= \frac{\partial V'}{\partial \alpha_2'} = x_2, \\ y_1 &= \frac{\partial W'}{\partial x_1}, \\ y_2 &= \frac{\partial C'}{\partial x_2} t + \alpha_2' + \frac{\partial W'}{\partial x_2} \end{aligned}\right. \tag{14*}$$

bestimmt.

Die Form der Lösung ist nicht so leicht zu übersehen wie im vorigen Falle. Wir können indessen die obigen Gleichungen vereinfachen. Zuerst wollen wir zeigen, wie man die Grösse α_1' in solcher Weise wählen kann, dass die mittleren Bewegungen der beiden Winkelgrössen y_1 und y_2 mit bezw.

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial C'}{\partial x_2}$$

zusammenfallen.

Aus dem Integrale

$$\Phi + \sum A_i \cos i y_1 = - C'$$

ist ersichtlich, dass x_1 unverändert bleibt, wenn y_1 mit 2π wächst. Die mittlere Bewegung von y_1 ist also gleich 2π dividirt durch die Periode von x_1. Diese lässt sich aber aus der Gleichung

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} t + \gamma_1' = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1'}$$

bestimmen. Ist nämlich r_2 der Minimalwerth von x_1 und r_1 sein Maximalwerth, so hat man nach (14)

$$W' = \int_{r_2}^{x_1} K \, d x_1,$$

da man das Recht hat, die eine Grenze des Integrals beliebig zu wählen. Folglich wird

$$\frac{\partial W'}{\partial \alpha_1'} = \int_{r_2}^{x_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_1'} d x_1,$$

wenn die Integrationsconstante γ_1' so gewählt wird, dass

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} t + \gamma_1' = 0$$

wird für $x_1 = r_2$.

Nennt man $2T$ die Periode von x_1, so hat man offenbar

$$(15) \qquad -\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} T = \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_1'} d x_1 .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich als die partielle Ableitung einer gewissen Function von α_1' und x_2 darstellen. Setzt man für den Augenblick

$$Q(\alpha_1', x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} K d x_1 ,$$

so ist

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1'} = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_1'} d x_1 + \frac{1}{\pi} K_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1'} - \frac{1}{\pi} K_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial \alpha_1'} .$$

Das letzte Glied in diesem Ausdrucke verschwindet nach den gemachten Voraussetzungen, weil $K_{r_2} = 0$ ist. Andererseits ist $K_{r_1} = \pi$, und man hat also

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1'} = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_1'} d x_1 + \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1'}$$

und ebenfalls

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} d x_1 + \frac{\partial r_1}{\partial x_2} .$$

Setzt man also

$$(16) \qquad Q_1 = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} K d x_1 - r_1 ,$$

so ist

$$(16^*) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1'} &= \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_1'} d x_1 , \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} d x_1 . \end{aligned} \right.$$

Wir können folglich die Gleichung (15) in der Form

$$(17) \qquad -\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} T = \pi \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1'}$$

schreiben.

Wird die mittlere Bewegung der Grösse y_1 mit n_1 bezeichnet, so ist

$$n_1 = \frac{\pi}{T}$$

und also nach (17)

$$(17^*) \qquad n_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1'} = -\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'}.$$

Wir wollen jetzt einen Ausdruck für die mittlere Bewegung n_2 der Grösse y_2 aufsuchen. Zu diesem Zweck suchen wir zuerst das mit t multiplicirte Glied in $\partial W' : \partial x_2$ auf.

Man hat

$$\frac{\partial W'}{\partial x_2} = \int\limits_{r_2}^{x_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} d x_1 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{d x_1}{d t} d t,$$

wo t_0 den Werth von t bezeichnet für $x_1 = r_2$.

Nun ist $\partial K : \partial x_2$ eine periodische Function in $n_1 t + c_1$ — wo unter c_1 eine gewisse Constante bezeichnet wird —, so dass man für den Coëfficienten von t rechter Seite in der obigen Gleichung nach dem FOURIER'schen Theorem den Werth

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{d x_1}{d t} d(n_1 t) = \frac{n_1}{\pi} \int\limits_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} d x_1 = n_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}$$

erhält. Also ist

$$(18) \qquad n_2 = \frac{\partial C'}{\partial x_2} + n_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}.$$

Die Formeln (17*) und (18) sind allgemein gültig. Besonders einfache Werthe erhalten diese Grössen, wenn α_1' mit Q_1 zusammenfallen sollte. Dann hat man

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1'} = 1, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} = 0$$

und also

$$(19) \qquad \begin{cases} n_1 = -\dfrac{\partial C'}{\partial \alpha_1'}, \\ n_2 = \dfrac{\partial C'}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Würde dagegen α_1' mit C' zusammenfallen, so würde man erhalten

$$\frac{1}{n_1} = -\frac{\partial Q_1}{\partial C'}; \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}.$$

Lässt man α' mit Q_1 zusammenfallen, in welchem Falle wir die Gleichungen (19) erhalten haben, können wir beweisen, dass $\alpha_1' = -\alpha_1$ ist.

Man hat in der That

$$\alpha_1' = \frac{1}{\pi}\int_{r_2}^{r_1} K\,dx_1 - r_1,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x_1\,dy_1.$$

Durch theilweise Integration erhält man aber

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x_1\,dy_1 = \frac{1}{\pi}\Big/_0^{\pi} x_1 y_1 - \frac{1}{\pi}\int_{r_2}^{r_1} y_1\,dx_1,$$

und da

$$(x_1)_\pi = r_1; \quad (y_1)_\pi = \pi; \quad (y_1)_0 = 0$$

und ausserdem nach (14*)

$$y_1 = \frac{\partial W'}{\partial x_1} = K$$

ist, so erhält man somit

$$(20) \qquad \alpha_1' = -\alpha_1.$$

Da nach (8^{**}) und (12^{*}) noch die Relation

$$C' = -C$$

besteht, so hat man

$$n_1 = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_1},$$

$$n_2 = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2},$$

mit den Formeln (10) übereinstimmend.

Die Berechnung der analytischen Ausdrücke für die Coordinaten im Delaunay'schen Problem stellt sich offenbar, rein mathematisch genommen, viel einfacher und übersichtlicher, wenn man y_1 und y_2 als „q-Coordinaten" annimmt, als wenn man x_1 und x_2 als solche benutzt. Indessen ist die letztere Wahl, wie schon gesagt worden ist, in praktischer Hinsicht vorzuziehen. Die Ursache hiervon ist, dass man im Ausdrucke (1^{*}) für F im Allgemeinen nur wenige Glieder in der Summe mitzunehmen braucht, ja dass öfters ein einziges Glied eine gute Annäherung geben kann. Die Folge hiervon ist, dass die Auflösung der Gleichung (8^{**}) in Bezug auf $\partial W : \partial y_1$ sich im Allgemeinen viel schwieriger gestaltet, als die Berechnung von $\partial W' : \partial x_1$ aus der Gleichung (12^{*}). Indem es im letzteren Falle öfters genügend ist, eine Gleichung ersten oder zweiten Grades aufzulösen, muss man in (8^{**}), um dieselbe Genauigkeit zu erreichen, eine Gleichung wenigstens des vierten Grades in Betracht ziehen.

Die weitere Verfolgung der Lösung geschieht folgendermassen: Man wählt $\alpha_1' = Q_1$ und erhält aus

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} t + \gamma_1' = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_1'} \tag{21}$$

in bekannter Weise x_1 als eine periodische Function von

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} t + \gamma_1'.$$

Die zweite Gleichung (14^{*}) giebt

$$x_2 = \gamma_2' = \text{Constans}.$$

Die dritte und vierte Gleichung giebt unter Anwendung von (14) y_1 und y_2 als Integrale über bekannte Functionen von x_1, die man in FOURIER'sche Reihen nach Vielfachen des Argumentes (21) entwickeln kann. Man erhält somit y_1 und y_2 als Functionen der Zeit.

Wir werden in einem folgenden Paragraphen Gelegenheit haben, dies Verfahren näher zu beleuchten.

§ 5. Ueber die Commensurabilitäten niedrigen Grades.

Sind die mittleren Bewegungen n und n' zweier Planeten nahe commensurabel, so dass *genähert*

$$n : n' = q : p$$

ist, wo p und q ganze Zahlen bezeichnen, die zu einander relativ prim sind, so entstehen, wie wir in VI § 4 gesehen haben, grosse Störungen in den Coordinaten der Planeten, deren Studium mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden ist. Den absoluten Betrag der Differenz $q - p$ nennen wir den *Grad* der Commensurabilität. Wird ein Glied, das in den Störungen erster Ordnung das Argument

$$(pn - qn')t + \text{Constans}$$

hat, aus der Störungsfunction herausgenommen, kann man mit Hilfe des DELAUNAY'schen Problems ein angenähertes Studium der Bewegung vornehmen. Die diesbezüglichen Untersuchungen sollen Gegenstand der Betrachtungen dieses und des nächsten Paragraphen ausmachen.

Ich fange mit den Commensurabilitäten niedrigen Grades an. Bei vielen der kleinen Planeten kann man durch Betrachtung eines solchen Gliedes, unter Hinzunahme der secularen Störungen — welche das DELAUNAY'sche Problem erlaubt *gleichzeitig* in Betracht zu ziehen — zu einer sehr angenäherten Kenntniss der Bahn des Planeten gelangen. Eine solche Untersuchung hat auch ihr grosses theoretisches Interesse, da sie eine Ahnung giebt von den grossen Schwierigkeiten, die man zu überwinden hat, um zu der allgemeinen

Lösung des Dreikörper-Problems zu gelangen. Die Betrachtung der Commensurabilitäten höheren Grades ist von nicht geringerem Interesse für diese Frage.

Indem wir uns immer noch, um die principiellen Gesichtspunkte hervorheben zu können, auf das asteroidische Dreikörper-Problem in der Ebene beschränken, nehmen wir aus dem Ausdrucke für die Störungsfunction — Gleichung (8) des dritten Paragraphen — folgende Glieder heraus:

1) Die in F_0 enthaltenen Glieder *nullter Ordnung* in Bezug auf die Masse — also in den Coordinaten x_1, x_2, y_1, y_2 des vorigen Paragraphen ausgedrückt

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + N(x_1 - x_2). \tag{1}$$

2) *Die secularen Glieder*, die wir mit $[F]$ bezeichnen. Diese sind nach dem Ausdrucke für $P_0^{(0)}$ im dritten Paragraphen

$$[F] = \mu[\tfrac{1}{2}A^{(0)} + (A_1^{(0)} + A_2^{(0)})s^2 + (-A_1^{(0)} - A_2^{(0)} + 3A_3^{(0)} + 3A_4^{(0)})s^4]. \tag{2}$$

3) Diejenigen Glieder in F, welche ein bestimmtes Argument g — wo g eine lineare Function von y_1 und y_2 ist mit ganzzahligen Coëfficienten — und seine Vielfachen enthalten. Wir schreiben diese Glieder in der Form

$$\sum G_i \cos ig,$$

wo

$$g = s_1 y_1 - s_2 y_2$$

und G_1, G_2, $G_3, \ldots$ bekannte Functionen von x_1 und x_2 sind. Die Grössen s_1 und s_2 bezeichnen beliebige ganze Zahlen.

Indem wir

$$R = F_0 + [F] + \sum G_i \cos ig \tag{3}$$

setzen, sind wir also zur Betrachtung der Gleichungen

$$(3^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial y_1}, & \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial y_2}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial x_2} \end{cases}$$

geführt.

Diese Gleichungen sind von der Form, die wir in § 4 für das DELAUNAY'sche Problem vorausgesetzt haben, oder können wenigstens durch eine lineare Transformation der Coordinaten auf diese Form gebracht werden. Wir können auch die im genannten Paragraphen gemachten Untersuchungen hier direct anwenden.

Statt vom Grade $|q-p|$ einer Commensurabilität zu sprechen, sagt man auch, dass die Commensurabilität *vom Typus* $p:q$ *ist.* Es ist zu bemerken, dass das entsprechende periodische Glied in F immer vom Grade $|q-p|$ in Bezug auf die Excentricitäten und die Neigungen ist.

Um die Ausdrucksweise zu präcisiren, nehmen wir jetzt an, dass es sich um die Commensurabilitäten vom *Typus 1/3* handelt. Das entsprechende periodische Hauptglied in (3) ist dann vom zweiten Grade in Bezug auf die Excentricität. Aus der Formel (8) des dritten Paragraphen erhalten wir für $s=2$ und $i=3$:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu P_2^{(3)} = G_1 = \mu\left[\left(\frac{21}{2} A^{(3)} + 5 A_1^{(3)} + A_2^{(3)}\right)\varepsilon^2\right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\frac{83}{2} A^{(3)} - \frac{76}{3} A_1^{(3)} + 4 A_2^{(3)} + 12 A_3^{(3)} + 4 A_4^{(3)}\right)\varepsilon^4\right]. \end{cases}$$

Weiter erhält man für $s=4$ und $i=6$:

$$(4^*)\qquad \mu P_4^{(6)} = G_2 = \mu\left(157 A^{(6)} + \frac{277}{3} A_1^{(6)} + 37 A_2^{(6)} + 9 A_3^{(6)} + A_4^{(6)}\right)\varepsilon^4.$$

Für das Argument g erhält man den Werth

$$(5)\qquad g = 3y_1 - 2(y_1 + y_2) = y_1 - 2y_2$$

oder nach den Formeln (6*) des dritten Paragraphen

$$(5^*)\qquad g = l - 3Nt + 3\pi.$$

Wir führen jetzt mittelst der linearen Transformation

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\tfrac{1}{2} y_1 + y_2 = -\tfrac{1}{2} g, \\
\lambda_2 &= y_1, \\
x_1 &= -\tfrac{1}{2} \Lambda_1 + \Lambda_2, \\
x_2 &= \Lambda_1,
\end{aligned}$$

statt x_1, x_2, y_1, y_2 die neuen Coordinaten $\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_1, \lambda_2$ ein. Nach § 1 sind diese Coordinaten auch canonisch. Wir haben also

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Lambda_1 &= x_2; & \lambda_1 &= -\tfrac{1}{2} y_1 + y_2, \\ \Lambda_2 &= x_1 + \tfrac{1}{2} x_2; & \lambda_2 &= y_1, \end{aligned} \right.$$

oder in den osculirenden Elementen ausgedrückt

$$(6^*) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Lambda_1 &= \sqrt{a}\,(1 - \sqrt{1-e^2}), & \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}(3Nt - l - 3\pi), \\ \Lambda_2 &= \sqrt{a}\,(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}), & \lambda_2 &= l + \pi - Nt, \end{aligned} \right.$$

und es ist

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\Lambda_1}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, & \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_1}, \\ \frac{d\Lambda_2}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_2}, & \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_2}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(7^*) \qquad R = F_0 + [F] + \sum G_i \cos 2 i \lambda_1$$

ist.

Die Grössen F_0, $[F]$ und G_i sind durch (1), (2), (4) und (4*) als Functionen von x_1 und x_2 gegeben. Es erübrigt noch diese Grössen als Functionen von Λ_1 und Λ_2 darzustellen.

Aus (6) erhält man

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \Lambda_2 - \tfrac{1}{2} \Lambda_1; & y_1 &= \lambda_2, \\ x_2 &= \Lambda_1; & y_2 &= \lambda_1 + \tfrac{1}{2} \lambda_2, \end{aligned} \right.$$

so dass man zuerst erhält:

$$(9) \qquad F_0 = \frac{1}{2(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1)^2} + N(\Lambda_2 - \tfrac{1}{2}\Lambda_1).$$

In Bezug auf $[F]$ und G_i empfiehlt sich nach den Potenzen von Λ_1 zu entwickeln.

Erstens bekommt man

$$(10) \qquad s^2 = \frac{x_2}{2x_1} = \frac{\Lambda_1}{2\Lambda_2 - \Lambda_1} = s'^2 + s'^4 + s'^6 + \ldots,$$

wo

$$(10^*) \qquad s'^2 = \frac{\Lambda_1}{2\Lambda_2}$$

gesetzt worden ist.

Die Grössen $A_s^{(i)}$ sind nach dem dritten Paragraphen durch die Formel

$$A_s^{(i)} = \frac{\alpha^s}{\lfloor s} \frac{\partial^s A^{(i)}}{\partial \alpha^s}$$

definirt und sind also Functionen nur von x_1. Man hat also

$$A^{(i)}(\Lambda_2 - \tfrac{1}{2}\Lambda_1) = A^{(i)} - \tfrac{1}{2}\Lambda_1 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x_1} + \left(\frac{\Lambda_1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial x_1^2} + \ldots$$

$$= A^{(i)} - s'^2 \left(x_1 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x_1}\right)_0 + s'^4 \left(\frac{x_1^2}{\lfloor 2} \frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial x_1^2}\right)_0 + \ldots,$$

wo in den Ausdrücken innerhalb der Klammern nach den Differentiationen $x_1 = \Lambda_2$ zu setzen ist.

Aus der Formel (9) des dritten Paragraphen leitet man aber leicht folgende Relationen ab:

$$x_1 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x_1} = 2A_1^{(i)},$$

$$\frac{x_1^2}{\lfloor 2} \frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial x_1^2} = A_1^{(i)} + 4A_2^{(i)},$$

so dass

$$(11)\qquad A^{(i)}(\Lambda_2 - \tfrac{1}{2}\Lambda_1) = A^{(i)} - 2\varepsilon'^2 A_1^{(i)} + \varepsilon'^4(A_1^{(i)} + 4A_2^{(i)}) + \dots$$

ist, aus welcher Formel man leicht die entsprechenden Ausdrücke für $A_1^{(i)}$, $A_2^{(i)}$, $A_3^{(i)}$, ... ableiten kann.

Da es hier nicht meine Absicht ist, die Commensurabilitäten vom Typus 1/3 vollständig zu untersuchen, sondern nur einige principielle Gesichtspunkte hervorzuheben, werde ich mich in der folgenden Untersuchung auf die Glieder *zweiten Grades* in $[F]$ und G_i beschränken. Dagegen werden wir F_0 unverändert behalten.

Man hat also unter Berücksichtigung von (11)

$$(12)\quad \begin{cases} R = \dfrac{1}{2(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1)^2} + N(\Lambda_2 - \frac{3}{2}\Lambda_1) \\ \qquad + \mu\{\frac{1}{2}A^{(0)} + A_2^{(0)}\varepsilon'^2 + (\frac{21}{2}A^{(3)} + 5A_1^{(3)} + A_2^{(3)})\varepsilon'^2\cos 2\lambda_1\}. \end{cases}$$

Da R von λ_2 unabhängig ist, hat man nach (7)

$$(13)\qquad \Lambda_2 = \text{Constans}.$$

Die Grössen $A_2^{(i)}$ sind also bei der Integration als Constanten zu betrachten.

Zuerst sind die *singulären Werthe der Integrationsconstanten* zu bestimmen. Diese erhält man nach § 2 durch Elimination von Λ_1 und λ_1 aus den Gleichungen:

$$R = C,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} = 0 = \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}.$$

Die zwei letzteren Gleichungen lauten:

$$(14)\qquad \frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} = 0 = \frac{1}{2(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1)^3} - \tfrac{3}{2}N + \frac{\mu}{2\Lambda_2}(A_2^0 + K\cos 2\lambda_1),$$

$$(14^*)\qquad -\frac{\partial R}{\partial \lambda_1} = 0 = 2\mu K\varepsilon'^2\sin 2\lambda_1,$$

wo man hat:

$$K = \frac{21}{2} A^{(3)} + 5 A_1^{(3)} + A_2^{(3)}. \tag{14**}$$

Die Gleichung (14*) hat nur die Wurzeln $\lambda = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Es ist zu bemerken, dass diese Schlussfolgerung nicht immer, für Commensurabilitäten *niedrigen* Grades, gilt, wenn man Glieder mit den Argumenten 4λ, 6λ u. s. w. mit berücksichtigt. Es können dann Singularitäten für andere Werthe als $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{\pi}{2}$ auftreten, wie wir in § 4 gefunden haben. Im Besonderen gilt dies für Commensurabilitäten vom Typus 1/2, 2/3 u. s. w., wo die charakteristischen Glieder vom Grade *eins* sind.

Setzen wir die Werthe $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{\pi}{2}$ in (14) ein, so erhalten wir folgende Gleichungen zur Bestimmung der singulären Werthe von Λ_1:

$$0 = \frac{1}{2(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1)^3} - \frac{3}{2} N + \frac{\mu}{2\Lambda_2}(A_2^{(0)} + K), \tag{15}$$

$$0 = \frac{1}{2(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1)^3} - \frac{3}{2} N + \frac{\mu}{2\Lambda_2}(A_2^{(0)} - K). \tag{15*}$$

Die entsprechenden Werthe von C erhält man aus:

$$C = R = F_0 + [F] + \mu K \varepsilon'^2, \tag{16}$$

$$C = R = F_0 + [F] - \mu K \varepsilon'^2. \tag{16*}$$

Die Gleichungen (15) und (15*) können direkt nach Λ_1 aufgelöst werden. Man erhält aus (15)

$$\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1 = \left(3N - \frac{\mu}{\Lambda_2}(A_2^{(0)} + K)\right)^{-1/3} \tag{17}$$

und aus (15*)

$$\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1 = \left(3N - \frac{\mu}{\Lambda_2}(A_2^{(0)} - K)\right)^{-1/3}. \tag{17*}$$

Diese Werthe für Δ_1 sollen in (16) und (16*) eingesetzt werden. Wir erhalten somit zwei Relationen zwischen Δ_2 und C, welche uns die zwei *singulären Curven* für den Typus 1/3 geben.

Die Gleichungen für diese Curven können also streng abgeleitet werden. Es empfiehlt sich aber für die numerische Rechnung eine Entwickelung nach Potenzen von Δ_1 zu benutzen. Bevor ich aber zu dieser Entwickelung übergehe, werde ich indessen einige Bemerkungen über die strenge Lösung der Gleichungen (7) einschieben.

Nimmt man in $[F]$ und G_1 nur auf die Glieder zweiten Grades Rücksicht, so dass R von der Form (12) ist, so lässt sich offenbar — nach (12) — die Gleichung für die Bahncurve in der Form

$$\cos 2\lambda_1 = \frac{\alpha + \beta \Delta_1 + \gamma \Delta_1^2 + \delta \Delta_1^3}{\alpha' + \beta' \Delta_1 + \gamma' \Delta_1^2 + \delta' \Delta_1^3}$$

schreiben.

Werden die Zähler und Nenner rechter Seite dieses Ausdruckes *bez.* mit X und Y bezeichnet, so findet man weiter, dass die Relation zwischen Δ_1 und der Zeit von der Form

$$t + \beta = \int \frac{(\Delta_2 - \frac{1}{2}\Delta_1)^2 \, d\Delta_1}{\sqrt{(Y - X)(Y + X)}}$$

ist. Die Function unterhalb des Wurzelzeichens ist zwar vom sechsten Grade, man kann aber doch in bekannter Weise die Bewegung untersuchen, was hier noch dadurch erleichtert wird, dass das Polynom sechsten Grades in zwei Factoren dritten Grades aufgelöst erscheint.

Wir wollen indessen diesen Weg nicht weiter verfolgen, sondern statt dessen R nach Potenzen von Δ_1 entwickeln. Die Gleichungen (17) und (17*) zeigen, dass auf der singulären Curve Δ_2 in der Nähe des Werthes $(3N)^{-1/3}$ liegt. Es ist deswegen am dringendsten, solche Werthe von Δ_2 in Betracht zu ziehen, die wenig von $(3N)^{-1/3}$ abweichen. Wir setzen demnach

$$(18)\qquad \begin{cases} \varkappa = (3N)^{1/3}, \\ \Delta_2 = \dfrac{1+\xi}{\varkappa} \end{cases}$$

und entwickeln R gleichzeitig nach Potenzen von ξ und Δ_1. Zur Abkürzung setzen wir noch

$$(18^*)\qquad z = \tfrac{1}{2}\varkappa \Delta_1 .$$

Dann ist

$$\Delta_2 - \tfrac{1}{2}\Delta_1 = \frac{1}{\varkappa}(1 + \xi - z)$$

und folglich bis zu Gliedern zweiten Grades in ξ und z *incl.*

$$F_0 = \frac{\varkappa^2}{2}\left(\tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}\xi + 3\xi^2 - 6\xi z + 3z^2\right).$$

Weiter hat man

$$A^{(0)}\left(\frac{1}{\varkappa}(1+\xi)\right) = A^{(0)}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) + \frac{1}{\varkappa}\xi\frac{\partial A^{(0)}}{\partial x_1} + \dots$$
$$= A^{(0)}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) + 2\xi A_1^{(0)} + \dots,$$

und

$$s'^2 = \frac{\varkappa}{1+\xi},$$

so dass, unter Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung $\xi^2\mu$,

$$[F] = \mu\left[\tfrac{1}{2}A^{(0)} + A_1^{(0)}\xi + A_2^{(0)}z\right],$$
$$G_1 = \mu K z$$

ist. Die Grössen A^0, $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$ und K sind für den Wert $x_1 = 1/\varkappa$ zu berechnen.

Setzt man noch

$$(19)\qquad \eta = \frac{2}{\varkappa^2}C - \tfrac{5}{3} - \frac{1}{\varkappa^2}\mu A^{(0)},$$

so lautet die Gleichung für die Bahncurve

$$(20) \qquad \eta = -\tfrac{4}{3}\xi + 3\xi^2 + 3z^2 - 6\xi z + \frac{2}{\varkappa^2}\mu\{A_1^{(0)}\xi + A_2^{(0)}z + Kz\cos 2\lambda_1\}.$$

Die Form der Curve hängt von den zwei Parametern ξ und η ab. Die singulären Werthe erhält man wie voraus für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = \pi/2$, indem nach den Auseinandersetzungen in § 4 die Discriminanten der Gleichungen

$$\eta = -\tfrac{4}{3}\xi + 3\xi^2 + 3z^2 - 6\xi z + \frac{2}{\varkappa^2}\mu\{A_1^{(0)}\xi + A_2^{(0)}z \pm Kz\}$$

aufsucht.

Diese Discriminanten lauten:

$$(21) \qquad \left\{6\xi - \frac{2}{\varkappa^2}\mu(A_2^{(0)} \pm K)\right\}^2 = 12\left(-\eta - \tfrac{4}{3}\xi + 3\xi^2 + \frac{2}{\varkappa^2}\mu A_1^{(0)}\xi\right).$$

Die Glieder zweiten Grades in ξ heben einander gegenseitig auf, so dass die singulären Werthe von ξ und η geometrisch durch zwei gerade Linien dargestellt werden, deren Gleichungen die Form

$$(21^*) \qquad \eta + \frac{1}{3\varkappa^4}\mu^2(A_2^{(0)} \pm K)^2 - \xi\left[-\tfrac{4}{3} + \frac{2}{\varkappa^2}\mu(A_1^{(0)} + A_2^{(0)} \pm K)\right] = 0$$

haben. Nennt man die Discriminanten D_1 und D_2, so hat diese Gleichung also die Form

$$D_1 = 0 \quad \text{und} \quad D_2 = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung, um für die numerische Rechnung bequemere Formeln zu erhalten,

$$(22) \qquad \left\{\begin{aligned} \eta' &= 1000\left(\eta + \tfrac{4}{3}\xi - 3\xi^2 - \frac{2}{\varkappa^2}\mu A_1^{(0)}\xi\right), \\ A_2' &= \frac{2000}{\varkappa^2}\mu A_2^{(0)}, \\ K' &= \frac{2000}{\varkappa^2}\mu K, \end{aligned}\right.$$

und können also die Gleichung (20) in der Form

$$\eta' = 3000\,z^2 + z\,[-6000\,\xi + A_2' + K'\cos 2\lambda_1] \tag{23}$$

schreiben.

Ist die Masse μ des störenden Körpers bekannt, so kann man für A_2' und K' bestimmte numerische Werthe einsetzen.

Wir nehmen an, dass es sich um die Jupiterstörungen handelt, so dass

$$\mu = \frac{1}{1047}$$

ist.

Man bekommt dann folgende Werthe für die hier vorkommenden LAPLACE'schen Coëfficienten. Man hat

$$x^3 = 3N = 3\sqrt{1+\mu} = 3.00143,$$
$$\sqrt{\alpha_0} = \frac{1}{x} = 0.69325,$$

woraus man $\alpha_0 = 0.48060$ bekommt, mit welchem Werth als Argument die LAPLACE'schen Functionen aus den Tafeln von RUNKLE folgende Werthe erhalten:

$$\tfrac{1}{2}A_0^{(0)} = +\,1.0667, \qquad A_0^{(2)} = +\,0.0777,$$
$$A_1^{(0)} = +\,0.3099, \qquad A_1^{(2)} = +\,0.2531,$$
$$A_2^{(0)} = +\,0.2585, \qquad A_2^{(2)} = +\,0.3109,$$
$$A_3^{(0)} = +\,0.1466, \qquad A_3^{(2)} = +\,0.2029.$$

Hieraus leitet man den Werth

$$K = +\,2.3924$$

ab.

Aus diesen Werthen erhält man

$$A_1' = \frac{2000\,\mu}{x^2}A_1^{(0)} = +\,0.2845,$$
$$A_2' = \frac{2000\,\mu}{x^2}A_2^{(0)} = +\,0.2373,$$
$$K' = \frac{2000\,\mu}{x^2}K \quad = +\,2.1963,$$

und weiter nach (22)

$$\eta' = 1000\,\eta + 1333{,}0488\,\xi - 3000\,\xi^2. \tag{22*}$$

Nennt man die singuläre Curve, welche dem Werth $\lambda_1 = 0$ entspricht, L_1 und diejenige singuläre Curve, die man für $\lambda_1 = \pi/2$ erhält, L_2, bekommt man folgende Gleichungen für L_1 und L_2:

Die singuläre Curve L_1

$$1000\,\eta = -\,0.000\,4935 - 1330.6152\,\xi. \tag{24}$$

Die singuläre Curve L_2

$$1000\,\eta = -\,0.000\,3198 - 1335.0078\,\xi. \tag{24*}$$

Führt man die Grösse η' statt η ein, lauten diese Gleichungen.

Für L_1:

$$\eta' = -\,0.000\,4935 + 2.4336\,\xi - 3000\,\xi^2.$$

Für L_2:

$$\eta' = -\,0.000\,3198 - 1.9600\,\xi - 3000\,\xi^2.$$

Die rechten Seiten sind genaue Quadrate, so dass man diese Gleichungen auch in folgender Form schreiben kann:

$$\left\{\begin{aligned} L_1:&\quad -\eta' = 3000\,(\xi - 0.000\,4056)^2,\\ L_2:&\quad -\eta' = 3000\,(\xi + 0.000\,3266)^2. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Durch die Grössen η' und ξ ausgedrückt sind also die singulären Curven zwei Parabeln mit parallelen Achsen, mit den Scheiteln *bez.* in den Punkten $\xi = +0.0004056$ und $\xi = -0003266$. Wir werden im Folgenden vorziehen, uns auf die beiden geraden Linien (24) und (24*) zu beziehen.

Diese beiden Linien schneiden sich im Punkte

$$\xi = +\,0.000\,0395,$$

$$\eta = -\,0.053\,0927.$$

Um die Differentialgleichungen

$$\frac{d A_1}{d t} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, \qquad \frac{d \lambda_1}{d t} = - \frac{\partial R}{d A_1}$$

zu lösen, gehen wir von der HAMILTON-JACOBI'schen Gleichung

$$\eta' = 3000\, z^2 + z \left[- 6000\, \xi + A_2' + K' \cos 2 \frac{\partial W'}{\partial A_1}\right] \tag{26}$$

aus.

Ist

$$W' = \tfrac{1}{2} \int \arccos \frac{\eta' - 3000\, z^2 + 6000\, \xi z - A_2' z}{K' z}\, d A_1 \tag{26*}$$

eine Lösung dieser Gleichung, wo η' als die Integrationsconstante betrachtet wird und nach (18*)

$$d A_1 = \frac{2}{\varkappa}\, dz$$

ist, so werden nach § 1 A_1 und λ_1 durch folgende Gleichungen als Functionen der Zeit gefunden:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} \arccos \frac{\eta' - 3000\, z^2 + 6000\, \xi z - A_2' z}{K' z}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \eta'} t - \beta_1 = \frac{\partial W'}{\partial \eta'}. \tag{27*}$$

Setzt man

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 &= K' z - \eta' + 3000\, z^2 - 6000\, \xi z + A_2' z, \\ X_2 &= K' z + \eta' - 3000\, z^2 + 6000\, \xi z - A_2' z, \end{aligned} \right. \tag{28}$$

so lautet die Gleichung (27*)

$$\frac{\partial C}{\partial \eta'} t - \beta_1 = \frac{1}{\varkappa} \int \frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}}, \tag{28*}$$

wodurch z als Function der Zeit gegeben ist.

Die Grenzen, zwischen denen die Grösse z schwankt, sind durch die Wurzeln der Gleichungen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ bestimmt. Diese lassen sich mit Hilfe der Discriminanten D_1 und D_2 ausdrücken. Setzt man

$$D_1' = \tfrac{1}{3} D_1 = \tfrac{1}{3}\eta + 0.000\,000\,1645 + 0.443\,5384\,\xi,$$
$$D_2' = \tfrac{1}{3} D_2 = \tfrac{1}{3}\eta + 0.000\,000\,1066 + 0.445\,0029\,\xi$$

und schreibt man weiter

$$X_1 = \quad 3000(z - \varrho_1)(z - \varrho_2),$$
$$X_2 = -\,3000(z - \varrho_3)(z - \varrho_4),$$

so hat man

$$(29)\qquad \begin{cases} \varrho_1 = \xi - 0.000\,4056 + \sqrt{D_1'}, \\ \varrho_2 = \xi - 0.000\,4056 - \sqrt{D_1'}, \\ \varrho_3 = \xi + 0.000\,3265 + \sqrt{D_2'}, \\ \varrho_4 = \xi + 0.000\,3265 - \sqrt{D_2'}. \end{cases}$$

Die Discriminante D_1' wechselt das Zeichen auf der Linie L_1, die Discriminante D_2' auf der Linie L_2. Ist D_1' negativ, so hat die Gleichung $X_1 = 0$ keine reelle Wurzel und X_1 bleibt immer *positiv*. Ist D_2' negativ, so hat die Gleichung $X_2 = 0$ keine reelle Wurzel und X_2 bleibt immer *negativ*. Da das Product $X_1 X_2$ nicht negativ sein darf, so findet man, dass solche Werthe von ξ und η nicht vorkommen dürfen, für welche D_1 und D_2 *gleichzeitig* negativ sind.

Die beiden geraden Linien L_1 und L_2 theilen die reelle $\xi\eta$-Ebene in vier Gebiete, die wir mit G_1, G_2, G_3 und G_4 bezeichnen, und zwar so, dass man hat

in $G_1 : D_1$ positiv, D_2 negativ,
„ $G_2 : D_1$ „ , D_2 positiv,
„ $G_3 : D_1$ negativ, D_2 „ ,
„ $G_4 : D_1$ „ , D_2 negativ.

Das Gebiet G_4 ist „verbotenes" Gebiet, da die Differentialgleichungen keine reelle Lösung gestatten, wenn der Punkt (ξ, η) in diesem Gebiete liegt.

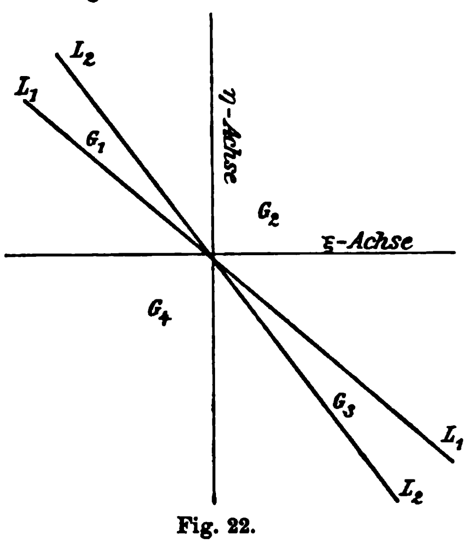


Fig. 22.

In G_1 sind die Wurzeln ϱ_3 und ϱ_4 imaginär, so dass hier X_2 immer negativ bleibt. Folglich muss X_1 auch immer negativ bleiben, wozu erforderlich ist, dass z zwischen den Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 schwankt. Hier kann offenbar niemals $2\lambda_1$ gleich 180^0 sein, sondern die Winkelgrösse λ_1 schwankt pendelartig um den Werth $\lambda_1 = 0$. *Man hat also im Gebiete G_1 Libration in λ_1 um $\lambda_1 = 0$.*

In G_2 sind alle Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 reell. Hier müssen also entweder X_1 und X_2 gleichzeitig beide *positiv* oder beide *negativ* sein. Die Grösse z schwankt zwischen einer der Wurzeln ϱ_1 oder ϱ_2 und einer der Wurzeln ϱ_3 oder ϱ_4. Welche von diesen Wurzeln die Grenzen von z bestimmen, hängt von deren numerischen Grösse ab. Die Winkelgrösse λ_1 wächst hier mit der Zeit ins Unendliche.

Endlich sind in G_3 die Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 imaginär, so dass X_1 immer positiv bleibt. Folglich muss auch X_2 immer positiv sein, wozu erforderlich ist, dass z zwischen den Grenzen ϱ_3 und ϱ_4 schwankt. Die Grösse $2\lambda_1$ kann hier niemals gleich 0^0 sein, sondern schwankt pendelartig um den Werth $2\lambda_1 = 180^0$. *Man hat also im Gebiete G_3 Libration in λ_1 um den Werth $2\lambda_1 = 180^0$.*

Um die oben skizzirten Bewegungsverhältnisse zu beleuchten, werde ich die Berechnung der Wurzeln für einen bestimmten numerischen Fall durchführen.

Ich setze

$$\xi = +\ 0.001$$

und erhalte dann die Discriminante aus den Formeln

$$D_1' = \tfrac{1}{3}\eta + 0.000\,443\,7029\,,$$
$$D_2' = \tfrac{1}{3}\eta + 0.000\,445\,1095\,.$$

Ich ertheile nun der Grösse η verschiedene Werthe zwischen $+\ 0.003$ und $-\ 0.001\,335\,3295$, welcher letztere Werth auf der Grenze zum „verbotenen" Gebiete (G_4) liegt, und erhalte aus (29) folgende Werthe für die Wurzeln:

	$\frac{1}{3}\eta$	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4
1)	$+\ 0.001$	$+\ 0.038\,5905$	$-\ 0.037\,4017$	$+\ 0.039\,3411$	$-\ 0.036\,6880$,
2)	$-\ 0.000\,2$	$+\ 0.016\,2054$	$-\ 0.015\,0166$	$+\ 0.016\,9825$	$-\ 0.014\,3295$,
3)	$-\ 0.000\,4430$	$+\ 0.001\,4811$	$-\ 0.000\,2423$	$+\ 0.002\,7756$	$-\ 0.000\,1226$,
4)	$-\ 0.000\,44335$	$+\ 0.001\,1885$	$+\ 0.000\,00035$	$+\ 0.002\,6530$	$\pm\ 0.000\,0000$,
5)	$-\ 0.000\,44370$	$+\ 0.000\,5944$	$+\ 0.000\,5944$	$+\ 0.002\,5125$	$+\ 0.000\,1405$,
6)	$-\ 0.000\,44440$	imaginär	imaginär	$+\ 0.002\,1688$	$+\ 0.000\,4842$,
7)	$-\ 0.000\,44511$	„	„	$+\ 0.001\,3265$	$+\ 0.001\,3265$.

Die Punkte 1), 2), 3) und 4) liegen im Gebiete G_2. Der Punkt 5) liegt auf L_1, also auf dem Uebergang zum Gebiete G_3. Punkt 6) liegt im Gebiete G_3 und endlich liegt Punkt 7) auf L_2 an der Grenze zum „verbotenen" Gebiete G_4.

In den Fällen 1), 2) und 3) oscillirt z periodisch zwischen ϱ_1 und ϱ_3. Die Winkelgrösse λ_1 wächst mit der Zeit ins Unendliche.

Für $\frac{1}{3}\eta = -\ 0.000\,44335$ und überhaupt für alle solchen η-Werthe, die zwischen diesem Werthe und dem Werthe $\frac{1}{3}\eta = -\ 0.000\,44370$ liegen, treten eigenthümliche Bewegungsverhältnisse auf. Es können nämlich hier zwei verschiedene Bahnformen auftreten: *entweder* oscillirt z zwischen ϱ_1 und ϱ_3 *oder*

zwischen ϱ_2 und ϱ_4. *Die Coordinaten sind also nicht eindeutige Functionen der Integrationsconstanten ξ und η.*

Für $\frac{1}{3}\eta = -0.000\,44370$ tritt *Limitation* auf. Dies kann auch in zweierlei Weise geschehen. Die Grösse z nähert sich dem Grenzwerth $+0.000\,5944$ entweder von kleineren z-Werthen, welche die untere Grenze $z = +0.000\,1405$ haben, oder von solchen z-Werthen ausgehend, die grösser als der Grenzwerth und kleiner als $+0.002\,5125$ sind.

Im Falle 6) oscillirt z zwischen ϱ_3 und ϱ_4. Die Winkelgrösse $2\lambda_1$ kann hier niemals gleich Null sein, sondern oscillirt um den Werth 180^0. Hier tritt also *Libration in* λ_1 auf. Dies findet statt für alle Werthe von η, die zwischen $\frac{1}{3}\eta = -0.000\,44370$ und $\frac{1}{3}\eta = -0.44511$ liegen.

Endlich nimmt im Falle 7) z den constanten Werth $+0.001\,3265$ an, was für $\frac{1}{3}\eta = -0.000\,44511$ eintritt. Für η-Werthe unterhalb dieser Grenze sind keine reellen Bewegungen möglich.

Die Wurzelgrössen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 geben die Punkte der Bahncurve, welche den Werthen $2\lambda_1 = 0$ und $2\lambda_1 = 180^0$ entsprechen. Um noch zwei Punkte der Bahncurve zu erhalten, werden wir aus (26) den Werth der Grösse z berechnen, welcher dem Werthe

$$A_2' + K' \cos 2\lambda_1 = 0$$

für λ_1 entspricht. Die numerischen Werthe von A_2' und K' hier eingesetzt, geben $2\lambda_1 = \pm 96^0.20$.

Die entsprechenden Werthe von z sind nach (26) und (22*)

$$z = \xi \pm \sqrt{\xi^2 + \frac{\eta'}{8000}}.$$

$$= \xi \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}\eta + 0.444\,3496\,\xi}.$$

Wir erhalten also in den drei Fällen 3), 4) und 5)

3) $z_1 = +0.002\,162$, $\quad z_2 =$ negativ,

4) $z_1 = +0.002\,000$, $\quad z_2 =$ „ ,

5) $z_1 = +0.001\,806$, $\quad z_2 = +0.000\,194$.

In den Fällen 6) und 7) sind die Werthe von z_1 und z_2 imaginär.

In der Fig. 23 habe ich die Form der Bahncurven 3) bis 7) geometrisch veranschaulicht. Die eine Curve 4), welche innerhalb der kleineren Limitationsschleife liegt, reducirt sich in dieser Scala auf einen Punkt. Die Limitationscurve ist punktirt gezeichnet. Wenn Limitation auftritt, so bewegt sich der Punkt (z, λ_1) auf einer der beiden Schleifen und nähert sich mit wachsender Zeit unbegrenzt dem Doppelpunkt der Limitationscurve, ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen.

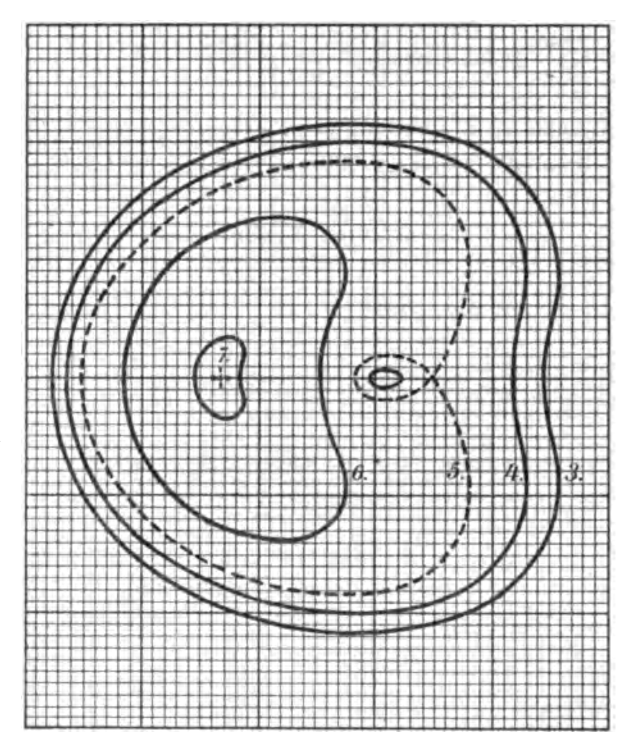


Fig. 23.

Ist ξ negativ oder positiv und kleiner als 0.000 0395 (die ξ-Coordinate des Schnittpunktes der Linien L_1 und L_2), so erfahren die obigen Auseinandersetzungen insofern eine Aenderung, als nunmehr die Libration in $2\lambda_1$ nicht mehr um $2\lambda_1 = 180^{\circ}$, sondern um den Werth $2\lambda_1 = 0$ stattfindet.

Die erhaltenen Zahlen werden verständlicher, wenn wir mit Hilfe der erhaltenen Grenzwerthe für z die entsprechenden Grenzwerthe der *osculirenden mittleren Bewegungen* des kleinen Planeten berechnen. Für die osculirende mittlere Bewegung — n — hat man die Gleichung

$$n = \frac{1}{a^{3/2}} = \frac{1}{x_1^{3}},$$

oder nach (8), (18) und (18*)

$$n = \frac{3N}{(1+\xi-z)^3} = 3N(1-3\xi+3z+\ldots). \tag{30}$$

Drückt man N in gewöhnlichen astronomischen Einheiten aus und nimmt man als störenden Planeten *Jupiter* an, so hat man

$$N = 299''.12836,$$

und also ist — für $\xi = 0.001$ —

$$n = 894''.69292 + z\,2692''.15524.$$

Hieraus leitet man folgende Grenzwerthe für die osculirenden mittleren Bewegungen in den Fällen 1) bis 7) ab.

Grenzwerthe für die osculirenden mittleren Bewegungen der kleinen Planeten vom Typus 1/3 für $\xi = +0.001$:

1)	998.5845	—	1000.6052	—
2)	938.8203	—	940.4124	—
3)	898.5456	—	902.1652	—
4)	897.8925	894.7023	901.9352	894.6929
5)	896.2931	896.2931	901.4569	895.0711
6)	—	—	900.5316	895.9964
7)	—	—	898.2640	898.2640.

Man sieht aus dieser Tafel unmittelbar, dass *die osculirenden mittleren Bewegungen eines kleinen Planeten jeden beliebigen Werth haben können.* Für $\xi\eta$-Werthe, die sich auf der singulären Curve L_1 befinden, nähert sich — wenigstens für $\xi = +0.001$ — die osculirende mittlere Bewegung einem Werth, den wir mit ν_1 bezeichnen wollen, so dass

$$\nu_1 = 896''.2931 \tag{31}$$

ist. Im Punkte 7) hat die osculirende mittlere Bewegung den Werth

$$\nu_3 = 898''.2640. \tag{31*}$$

Findet Libration in λ_1 statt, so oscillirt die osculirende mittlere Bewegung zwischen zwei Grenzen, von denen die eine kleiner als ν_1, die andere grösser als ν_3 ist.

Hat man es mit einer Bahncurve [z. B. 4)] innerhalb der kleineren Limitationsschleife zu thun, so liegen die Werthe der osculirenden mittleren Bewegungen unterhalb ν_1.

Die obigen Schlussfolgerungen gelten vorläufig nur für den Werth $\xi = +0.001$. Man kann aber leicht einige der wichtigsten auf alle Werthe von ξ verallgemeinern.

Man kann in der That beweisen, dass *in allen Pnnkten auf der Linie L_1 die osculirende mittlere Bewegung sich dem durch die Gleichung (31) definirten Werth ν_1 unbegrenzt nähert.*

Weiter können wir beweisen, *dass in allen Punkten auf der Linie L_2 die osculirende mittlere Bewegung den durch (31*) definirten Werth ν_3 besitzt.*

Liegt nämlich der Punkt (ξ, η) auf L_1, so nähert sich nach (29) z dem Werth

$$\xi - 0.000\,4056.$$

Diesem Werth von z entspricht aber nach (30) ein constanter Werth von n, nämlich

$$n = \frac{3N}{(1 + 0.000\,4056)^3} = 896''.2931 = \nu_1.$$

In ähnlicher Weise findet man — weil in n nur die *Differenz* zwischen z und ξ vorkommt —, dass auf L_3 die osculirende mittlere Bewegung den Werth ν_3 besitzt.

Sehen wir von den Bahncurven ab, welche innerhalb der kleineren Limitationsschleife fallen, so sehen wir, dass im Gebiete G_2 *die osculirenden mittleren Bewegungen grösser als* ν_1 *sind*, und würden wir eine ähnliche Untersuchung für negative ξ-Werthe (oder strenger für $\xi < 0.000\,0395$) vornehmen, so würden wir finden, dass die osculirenden mittleren Bewegungen ausserhalb des Librationsgebietes dann kleiner als ν_3 sind. Findet dagegen Libration statt, so oscillirt die osculirende mittlere Bewegung zwischen zwei Grenzen, von denen die eine — die obere Grenze — immer grösser als ν_3 ist, wogegen die untere Grenze immer kleiner als ν_3 ist; sie kann aber, je nach den Umständen, grösser oder kleiner als ν_1 sein. Dieser Umstand zeigt also, *dass infolge der Commensurabilität keine Lücke in den osculirenden mittleren Bewegungen auftritt.* Dasselbe muss also auch von den osculirenden halben grossen Achsen der Planetenbahnen gelten. Da die Planetenelemente, die in astronomischen Ephemeriden publicirt sind, fast ausschließlich osculirende Elemente sind, so findet man also, dass die Lücken, die man im Ring der kleinen Planeten gefunden hat, und die gerade da auftreten, wo die osculirenden mittleren Bewegungen der Planeten zwei Mal und drei Mal grösser als die mittlere Bewegung Jupiters sind, *nicht etwa dadurch erklärt werden können, dass solche osculirenden Elemente der kleinen Planeten möglicherweise vom theoretischen Gesichtspunkte unmöglich sein sollten.*[1] Dies hindert aber nicht, dass die Erklärung dieser eigenthümlichen Lücken mit den Discontinuitätspunkten des DELAUNAY'schen Problems in Zusammenhang stehen kann.

Wie verhalten sich die *wahren* mittleren Bewegungen in den Gebieten G_1, G_2 und G_3? Um dies zu beantworten, wollen wir

[1] Dies ist übrigens schon daraus selbstverständlich, dass man sich ja einen Planeten denken kann, der *in einem bestimmten Augenblicke* eine gegebene Ellipse beschreibt, wie diese Ellipse auch aussieht. Die *osculirenden* Elemente können alle beliebig gewählt werden.

zuerst den Begriff der wahren mittleren Bewegung etwas näher beleuchten.

Die Gleichung (28*) zeigt, dass z — von den singulären Linien L_1 und L_2 abgesehen — eine periodische Function der Zeit ist. Wir nennen die Periode $2T_1$ und setzen

$$n_1 = \frac{\pi}{T_1}.$$

Dann finden wir aus der Gleichung (27), dass auch $d\lambda_1 : dt$ eine periodische Function mit derselben Periode ist. Folglich können wir schreiben

$$2\lambda_1 = n_1 t + c_1 + \sum a_i \sin i(n_1 t + c_1).$$

Weiter hat man nach (7)

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial A_2}$$

und die rechte Seite ist eine Potenzreihe in z, die auch als eine periodische Function der Zeit mit der Periode $2T_1$ ausgedrückt werden kann. Folglich hat man

$$\lambda_2 = n_2 t + c_2 + \sum b_i \sin i(n_1 t + c_1).$$

Die Grössen n_1 und n_2 sind die mittleren Bewegungen von *bez.* $2\lambda_1$ und λ_2.

Setzt man diese Formeln in die Gleichung (6*) ein, so erhält man die mittlere Länge $l + \pi$ und die Perihellänge π als Functionen der Zeit dargestellt. Man bekommt aus (6*)

$$l + \pi = \lambda_2 + Nt = (n_2 + N)t + c_2 + \sum b_i \sin i(n_1 t + c_1),$$

$$\pi = N - \tfrac{1}{2}(2\lambda_1 + \lambda_2) = \left(N - \tfrac{1}{2}(n_1 + n_2)\right)t + c_3 + \sum c_i \sin i(n_1 t + c_1).$$

Die wahre mittlere Bewegung eines kleinen Planeten, die wir mit n_0 bezeichnen wollen, hat also den Werth

$$n_0 = n_2 + N \tag{32}$$

und für *die mittlere Bewegung des Perihels* hat man den Ausdruck

$$N - \tfrac{1}{2}(n_1 + n_2).$$

Wird der mittlere Werth einer Function durch Einklammern bezeichnet, so hat man nach (7)

$$\left\{\begin{aligned} n_1 &= \left[2\frac{d\lambda_1}{dt}\right] = -2\left[\frac{\partial R}{\partial \varDelta_1}\right], \\ n_2 &= \left[\frac{d\lambda_2}{dt}\right] = -\left[\frac{\partial R}{\partial \varDelta_2}\right]. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Will man den Werth von n_2 für Punkte innerhalb des Librationsgebietes G_3 berechnen, so verfährt man am einfachsten in folgender Weise:

Man hat nach (6)

$$\frac{\partial R}{\partial \varDelta_1} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varDelta_2} = \frac{\partial R}{\partial x_1}$$

und also

$$\frac{\partial R}{\partial \varDelta_2} + 2\frac{\partial R}{\partial \varDelta_1} = 2\frac{\partial R}{\partial x_2}.$$

Innerhalb der Gebiete G_1 und G_3 hat man aber $n_1 = 0$, folglich auch

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \varDelta_1}\right] = 0,$$

so dass also hier

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \varDelta_2}\right] = 2\left[\frac{\partial R}{\partial x_2}\right] \tag{34}$$

ist.

Die rechte Seite ist aber verhältnissmässig leicht zu bilden. Aus (1), (2) und (4) erhält man

$$(35)\quad \begin{cases} -2\dfrac{\partial R}{\partial x_2} = 2N + \frac{\mu}{a_1}[-A_1^{(0)} - A_2^{(0)} - (\tfrac{3}{2} A^{(3)} \\ \qquad\qquad + 5A_1^{(3)} + A_2^{(3)})\cos 2\lambda_1 + \ldots]. \end{cases}$$

Die vernachlässigten Glieder sind alle mit einer positiven Potenz von s^2 und mit der Masse μ multiplicirt. Um den Mittelwerth der rechten Seite dieses Ausdruckes zu berechnen, ist in erster Linie nothwendig, den Mittelwerth von $\cos 2\lambda_1$ kennen zu lernen. Im Gebiete G_3 ist λ_1 eine periodische Function von t, die wir in der Form

$$\lambda_1 = 180^0 + \sum c_i \sin i(n_3 t + c_3)$$

schreiben können. Man hat also in diesem Gebiete

$$[\cos 2\lambda_1] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2\lambda_1\, d(n_3 t + c_3).$$

Indem $n_3 t + c_3$ von 0 bis π wächst, schwankt z zwischen ϱ_4 und ϱ_3, so dass nach (28*)

$$[\cos 2\lambda_1] = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{n_3}{\dfrac{\partial C}{\partial \eta'}}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\varrho_4}^{\varrho_3} \frac{X_2 - X_1}{X_2 + X_1}\,\frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}}.$$

Man hat aber nach (28*) offenbar

$$\frac{\partial C}{\partial \eta'}\cdot\frac{\pi}{n_3} = \frac{1}{\varkappa}\int_{\varrho_4}^{\varrho_3} \frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}},$$

so dass

$$(36)\qquad [\cos 2\lambda_1] = \int_{\varrho_4}^{\varrho_3} \frac{X_2 - X_1}{X_2 + X_1}\,\frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}} : \int_{\varrho_4}^{\varrho_3} \frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}}.$$

Um diese Integrale zu berechnen, werde ich die Integration der Gleichung (28*) für den Librationsfall ausführen.

Die Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 sind imaginär. Setzt man

$$\varrho_1 = \alpha + i\beta,$$

$$\varrho_2 + \alpha - i\beta,$$

so hat man

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \xi - 0.000\,4056\,, \\ \beta &= \sqrt{-D_1'}\,. \end{aligned}\right.$$

Das Integral der Gleichung (28*) lautet dann

$$x = \frac{\varrho_4 + \varrho_1 h_1 + (-\varrho_4 + \varrho_3 h_1)\,\mathrm{cn}\,u}{1 + h_1 + (-1 + h_1)\,\mathrm{cn}\,u}\,,$$

wo h_1 und u folgende Bedeutungen haben.

Wir führen die Hilfswinkel φ_1 und φ_2 durch die Formeln

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{\varrho_4 - \alpha}{\beta}\,, \qquad \mathrm{tg}\,\varphi_2 = \frac{\varrho_3 - \alpha}{\beta}$$

ein. Dann ist

$$(38)\qquad h_1 = \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1} = \sqrt{\frac{(\varrho_4 - \alpha)^2 + \beta^2}{(\varrho_3 - \alpha)^2 + \beta^2}}$$

und

$$(38^*)\qquad g = 3000\,\varkappa\,\frac{\partial C}{\partial\eta'}\,\sqrt[4]{((\varrho_4 - \alpha)^2 + \beta^2)((\varrho_3 - \alpha)^2 + \beta^2)}$$

und

$$(38^{**})\qquad u = g\,t + \text{Constans}.$$

Der Modul — k — der elliptischen Function $\mathrm{cn}\,u$ ist

$$k = |\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)|\,.$$

Hieraus leitet man die folgenden Ausdrücke für X_1 und X_2 ab

$$[1 + h_1 + (-1 + h_1)\,\mathrm{cn}\,u]\,X_1 = 12000\,((\varrho_4 - \alpha)^2 + \beta^2)(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u)\,,$$

$$[1 + h_1 + (-1 + h_1)\,\mathrm{cn}\,u]\,X_2 = 3000\,h_1\,(\varrho_3 - \varrho_4)^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,,$$

und endlich ist

$$\frac{dx}{\sqrt{X_1 X_2}} = \frac{du}{3000 \sqrt[4]{((\varrho_4 - \alpha)^2 + \beta^2)((\varrho_3 - \alpha)^2 + \beta^2)}}.$$

Mittelst dieser Formeln kann das Integral (36) berechnet werden. Es ist indessen nicht nothwendig, diese Berechnungen auszuführen, um eine Uebersicht der Veränderungen der wahren mittleren Bewegung zu erhalten. Erstens ist ersichtlich, dass der mittlere Werth von $[\cos 2\lambda_1]$ höchstens gleich $+1$ und mindestens gleich -1 ist. *Diese Grenzen werden auch in der That erreicht,* oder wenigstens kommt man ihnen beliebig nahe. Dies geschieht nämlich in der unmittelbaren Nähe der beiden singulären Linien L_1 und L_2. Folglich muss innerhalb des Gebietes G_3 die wahre mittlere Bewegung n_0 zwischen den beiden Grenzen

$$\nu_1^{(0)} = 3N + \frac{\mu}{x_1}(-A_1^{(0)} - A_2^{(0)} - K) \tag{39}$$

und

$$\nu_3^{(0)} = 3N + \frac{\mu}{x_1}(-A_1^{(0)} - A_2^{(0)} + K) \tag{39*}$$

schwanken, wo die vernachlässigten Glieder mit ξ und der störenden Masse multiplicirt sind und also verhältnissmässig klein sind.

Werden die numerischen Werthe eingesetzt, so findet man

$$\left\{ \begin{aligned} \nu_1^{(0)} &= 896''.165, \\ \nu_3^{(0)} &= 898''.136. \end{aligned} \right. \tag{39**}$$

Die beiden Grenzen für n_0 innerhalb des Gebietes G_3 fallen also nicht mit ν_1 und ν_3 zusammen. Man findet in der That, dass

$$\nu_1 - \nu_1^{(0)} = \nu_3 - \nu_3^{(0)} = +0''.128.$$

Die Differenz $\nu_3 - \nu_1$ ist also gleich der Differenz $\nu_3^{(0)} - \nu_1^{(0)}$.

Wie verhält sich die wahre mittlere Bewegung beim Uebergang über die singulären Linien L_1 und L_2? Um dies zu entscheiden, wollen wir einen angenäherten Ausdruck für die wahre mittlere Bewegung im Gebiete G_2 aufsuchen. Man hat nach (32) und (33)

$$n_0 = N - \left[\frac{\partial R}{\partial A_2}\right].$$

Es ist aber

$$R = F_0 + [F] + G_1 \cos 2\lambda_1,$$

und man hat

$$\frac{\partial F_0}{\partial A_2} = -\frac{1}{x_1^{3}} + N = -n + N,$$

wo n die osculirende mittlere Bewegung bezeichnet. Weiter ist genähert

$$\frac{\partial [F]}{\partial A_2} = \tfrac{1}{2}\mu \frac{\partial A^{(0)}}{\partial x_1} = \frac{\mu}{x_1} A_1^{(0)}.$$

Was den mittleren Werth von

$$G_1 \cos 2\lambda_1$$

betrifft, so ist er — innerhalb des Gebietes G_2 — bis auf Glieder vom zweiten Grade der Excentricität und von der zweiten Ordnung der Masse gleich Null,[1] also hat man genähert

$$\begin{aligned} n_0 &= [n] - \frac{\mu}{x_1} A_1^{(0)}, \\ &= [n] - 0''.128, \end{aligned}$$

wo $[n]$ den Mittelwerth der osculirenden mittleren Bewegungen bezeichnet. Von diesem Mittelwerth weiss man, dass er auf

[1] In der unmittelbaren Nähe von L_1 ist zwar die Grösse $[G_2 \cos 2\lambda_1]$ nur von der *ersten* Ordnung der Masse; sie bleibt aber vom zweiten Grade der Excentricität, und also klein im Verhältnis zu den hier mitgenommenen Gliedern.

L_1 gleich 896".2931 ($= \nu_1$) ist. In der Nähe von L_1 weicht auch $[n]$ nicht viel von diesem Werth ab und folglich hat man im Gebiete G_2 nahe der singulären Linie L_1

$$n_0 = 896''.165 = \nu_1^{(0)}.$$

Wir finden also, dass die wahre mittlere Bewegung beim Passiren der singulären Linie L_1 keinen Sprung macht, sondern continuirlich in die mittleren Bewegungen des Gebietes G_3 übergehen.

Dies ist insofern überraschend, als die singulären Linien L_1 und L_2 in anderer Beziehung als *Discontinuitätslinien* zu betrachten sind. Dies gilt nämlich in Bezug auf die *Schwankungsamplitude der Excentricität.*

Im Gebiete G_2 schwankt z (welche Grösse ja genähert gleich $\frac{1}{4}e^2$ ist) zwischen ϱ_1 und ϱ_3, und die Schwankungsamplitude ($= \varrho_3 - \varrho_1$) ist

$$\varrho_3 - \varrho_1 = + 0.000\,7321 + \sqrt{D_2'} - \sqrt{D_1'}. \tag{40}$$

Im Gebiete G_3 werden aber die Schwankungen von z von den Wurzeln ϱ_3 und ϱ_4 begrenzt, und hier ist die Schwankungsamplitude

$$\varrho_3 - \varrho_4 = 2\sqrt{D_2'}. \tag{41}$$

Halten wir uns in unmittelbarer Nähe von L_1, ist $D_1' = 0$ und folglich die Schwankungsamplitude

$$\text{im Gebiete } G_2: + 0.000\,7321 + \sqrt{D_2'} = a_2,$$
$$\text{im Gebiete } G_3: \qquad 2\sqrt{D_2'} = a_3.$$

Zieht man in Betracht, dass D_1' sehr klein angenommen worden ist, so hat man hier genähert

$$D_2' = - 0.000\,000\,0579 + 0.001\,4645\,\xi.$$

Beim Uebergang der Linie L_1 springt also die Schwankungsamplitude vom Werthe a_2 zum Werthe a_3. Für sehr kleine Werthe von ξ (die indessen grösser als 0.000 0395 sein müssen) ist $a_2 > a_3$. Für $\xi = + 0.000\,4055$ ist $a_2 = a_3$. Für noch grössere Werthe von ξ ist immer $a_3 > a_2$.

Dieser Sprung in der Schwankungsamplitude, wenn die Integrationsconstanten die singulären Linien überschreiten, ist die am meisten charakteristische Eigenschaft der Integrale in der Nähe eines Commensurabilitätsfalles. Es ist zu bemerken, dass gleichzeitig damit, dass die Schwankungsamplitude sich in dieser Weise sprungweise ändert, *die Periode* — wie schon bewiesen worden ist — *continuirlichen Aenderungen unterliegt.*

Bis jetzt habe ich das Gebiet G_1 nicht mit in Betracht gezogen. Die Wurzeln ϱ_3 und ϱ_4 sind hier imaginär, und man würde erwarten, dass die Bewegung dann zwischen ϱ_1 und ϱ_2 stattfinden würde. Die Formel (29) zeigt aber, dass nunmehr ϱ_2 negativ ist. Da indessen die Grösse z ihrer Natur nach immer positiv ist, so kann in diesem Falle ϱ_2 nicht eine Grenze für die Schwankungen von z ergeben. Andererseits scheint es,[1] dass es innerhalb G_1 ein Gebiet gibt, in welchem ϱ_1 positiv ist, und wo also positive z-Werthe mit den Differentialgleichungen vereinbar sind. Wie sollen die dementsprechenden Bewegungen untersucht werden, wenn sie überhaupt existiren? Die Differentialgleichungen (7) lassen uns hier im Stiche. Die Frage lässt sich am einfachsten studiren, indem man für Λ_1 und λ_1 die neuen canonischen Veränderlichen (man vergleiche VI § 1)

$$u = \sqrt{2\Lambda_1}\cos\lambda_1\,,$$
$$v = \sqrt{2\Lambda_1}\sin\lambda_1$$

einführt. Ich habe indessen diese Frage nicht weiter verfolgt. So viel lässt sich ohne Weiteres aussagen, dass diese Bahncurven,

---

[1] Ich sage „scheint", weil das Gebiet der positiven ϱ_1 innerhalb G_1 immerhin sehr klein ist, und es deswegen nicht ausgeschlossen ist, dass der hier beobachtete Genauigkeitsgrad ungenügend sein kann, um die Frage endgültig zu entscheiden.

wenn sie existiren, eine Libration in λ_1 um $\lambda_1 = 0$ aufweisen müssen, da ja der Werth $2\lambda_1 = 180^\circ$ mit diesen Werthen der Integrationsconstanten unvereinbar ist.

Wie man sieht, sind die Linien L_1 und L_2 nicht die einzigen Grenzlinien für die Integrationsconstanten. Die Werthe 0 und 1 für die Excentricität (also 0 und $\frac{1}{2}$ für $\varDelta_1$) bilden auch Grenzlinien, die nicht überschritten werden dürfen.

Fassen wir unsere Resultate über die Commensurabilitäten vom Typus 1/3 zusammen, so haben wir also folgendes gefunden:

Die Integrale hängen von zwei Integrationsconstanten ξ und η ab. Von diesen fällt η ungefähr mit der Jacobi'schen Constante zusammen, wogegen ξ von der Excentricitätsconstante abhängt. Werden ξ und η als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene dargestellt, so wird diese Ebene durch zwei gerade Linien L_1, L_2 in vier Gebiete G_1, G_2, G_3, G_4 getheilt, die sich durch verschiedene Bewegungsformen charakterisiren. Liegt der Punkt (ξ, η) in G_4, ist keine Bewegung möglich. In G_2 wächst λ_1 über alle Grenzen, wowegen $\varDelta_1$ — und damit die Excentricität — zwischen zwei *constanten* Grenzen schwankt. In G_3 schwankt auch die Excentricität zwischen constanten Grenzen und dies ist hier ebenfalls mit der Grösse λ_1 der Fall. Es findet *Libration* um den Werth $2\lambda_1 = 180^\circ$ statt. Indem der Punkt (ξ, η) vom Gebiete G_2 aus die singuläre Linie L_1 überschreitet und in das Gebiet G_3 übergeht, ändert sich die Schwankungsamplitude der Excentricität sprungweise, wogegen die Periode dieser Schwankungen sich continuirlich ändert. Im Gebiete G_1 kann möglicherweise eine Libration in λ_1 um den Werth $\lambda_1 = 0$ stattfinden. Auf der Linie L_1 nähert sich die osculirende mittlere Bewegung, für alle Werthe von ξ und η, dem Werthe 896″.293; auf der Linie L_2 hat sie den Werth 898″.264. Die wahre mittlere Bewegung hat auf diesen Linien *bez.* den Werth 896″.165 und 898″.264. Die Eigenschaften der Integrale geben keine *directe* Erklärung der Lücke in der Zahl der kleinen Planeten um den Werth 897″ für die mittlere Bewegung.

Ueber die kleinen Planeten vom Typus 1/2 liegen Untersuchungen von verschiedenen Verfassern vor. Die Resultate sind ähnlich, aber nicht identisch mit denen, die wir hier für den

Typus 1/3 gefunden haben. Unter diesen Untersuchungen nenne ich die von GYLDÉN (in mehreren seiner Schriften), HARZER (Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, 1886), BRENDEL (A. N. Bd. 140, 1896 und in seiner „Theorie der kleinen Planeten"), SCHWARZSCHILD (A. N. Bd. 160, 1902), POINCARÉ (B. A. T. XIX, 1902), ANDOYER (B. A. 1903) und HILL (Trans. Amer. M. Soc. 1900). Von diesen sind die von BRENDEL und von ANDOYER die vollständigsten. Der letztere hat unter Anderem bewiesen, dass beim Typus 1/2 singuläre Linien und Librationsbewegungen nicht nur für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = 180^0$, sondern auch für einen zwischenliegenden Werth von λ_1 auftreten können, worauf wir oben aufmerksam gemacht haben. Indessen ist dieser Typus noch nicht erschöpfend behandelt, ebensowenig wie der Typus 1/3, und es wäre jetzt Zeit, nachdem die Voruntersuchungen so weit fortgeschritten sind, diese beiden interessanten Fälle, die für die Mechanik des Himmels von so grossem und so actuellem Interesse sind, zum Gegenstand eines eingehenden Studiums zu machen.

§ 6. Ueber Commensurabilitäten höheren Grades.

Die Commensurabilitäten niedrigen Grades geben zu grossen Störungsgliedern Veranlassung, welche schon in ziemlich kurzer Zeit grosse Veränderungen in den Coordinaten verursachen. Nicht so mit den Commensurabilitäten höheren Grades. Diese können erst in langer Zeit bemerkbar werden. Sie sind aber nichtsdestoweniger vom grössten Interesse, da gerade diese Glieder für die Stabilitätsfrage die wichtigsten sind. Wir werden eine solche Commensurabilität untersuchen, und zwar unter Anwendung derselben Methode wie im vorigen Paragraphen.

Wir nehmen aus der Störungsfunction heraus: 1) die Glieder nullter Ordnung (F_0), 2) die secularen Glieder $[F]$, 3) die Glieder

$$\sum G_i \cos ig,$$

wo

$$g = s_1 y_1 - s_2 y_2$$

ist, und s_1 und s_2 *hohe Zahlen* bezeichnen, von denen s_2 als positiv betrachtet werden kann. Es handelt sich dann um Commensurabilitäten vom Grade s_2.

Indem wir

$$R = \eta + F_0 + [F] + \sum G_i \cos ig \tag{1}$$

setzen, wo unter η eine noch unbestimmte Constante verstanden wird, werden wir also zu der Differentialgleichung (3*) des vorigen Paragraphen geführt.

Was die Coëfficienten G_i betrifft, so wissen wir nach § 4, dass G_1 vom Grade s_2 in den Excentricitäten ist. Weiter ist G_2 vom Grade $2s_2$ und allgemein G_i vom Grade is_2. Da s_2 hier als eine sehr große Zahl betrachtet wird, so ist somit G_1 sehr klein und die Reihe $\sum G_i$ convergirt sehr rasch.

Um die Bewegungsgleichungen auf einen Freiheitsgrad zu reduciren, setzen wir

$$\lambda_1' = s_1\, y_1 - s_2\, y_2,$$
$$\lambda_2' = s_1' y_1 - s_2' y_2,$$

wo s_1' und s_2' vorläufig unbestimmt sind. Wenn noch

$$x_1 = \quad s_1\, \varDelta_1' + s_1' \varDelta_2',$$
$$x_2 = - s_2\, \varDelta_1' - s_2' \varDelta_2'$$

gesetzt wird, so bilden auch $\varDelta_1'$, $\varDelta_2'$, λ_1' und λ_2' ein System von canonischen Coordinaten mit derselben charakteristischen Function R. In Bezug auf $\varDelta_1'$ und $\varDelta_2'$ aufgelöst, lauten die letzteren Gleichungen

$$\varDelta\, \varDelta_1' = - s_2' x_1 - s_1' x_2,$$
$$\varDelta\, \varDelta_2' = \quad s_2\, x_1 + s_1\, x_2,$$

wo

$$\varDelta = - s_1\, s_2' + s_2\, s_1'$$

gesetzt worden ist.

Wir nehmen noch eine Transformation vor, indem wir setzen:

$$\Delta \lambda_1 = \lambda_1'; \qquad \lambda_2 = -\lambda_2',$$
$$\Lambda_1 = \Delta \Lambda_1'; \quad \Lambda_2 = -\Lambda_2',$$

und die neuen Coordinaten Λ_1, Λ_2, λ_1, λ_2 bleiben immer noch canonisch.

Die Wahl der Zahlen s_1' und s_2' ist willkürlich. Man könnte z. B. diese Wahl so ausführen, dass man

$$\Delta = 1$$

bekommt. Diese Wahl ist in einigen Fällen angemessen (z. B. für den Typus 1/2), führt aber bei hohen Commensurabilitäten zu Coordinaten Λ_1 und Λ_2, die in Folge der Zahlencoëfficienten s_1, s_2, s_1', s_2' sehr gross sind, was nicht bequem ist. Hier führt eine andere Wahl besser zum Ziel. Ich setze:

$$s_1' = -1; \quad s_2' = 0,$$

so dass $\Delta = -s_2$ ist und

$$(2) \qquad \begin{cases} \Lambda_1 = x_2, & \lambda_1 = -\frac{s_1}{s_2} y_1 + y_2, \\ \Lambda_2 = x_1 + \frac{s_1}{s_2} x_2, & \lambda_2 = y_1, \end{cases}$$

welche Coordinaten wir der folgenden Untersuchung zu Grunde legen werden.

Da die Störungsfunction nach Potenzen von x_2 (oder richtiger von $\sqrt{x_2}$) entwickelt ist, so erscheint es angemessen, x_2 als die eine Coordinate beizubehalten. Die Grösse Λ_2 unterscheidet sich nur um die kleine Grösse $\frac{s_1}{s_2} x_2$ von x_1, und endlich ist das Argument g_1 gleich $-s_2 \lambda_1$.

Die Differentialgleichungen

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, & \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial A_1}, \\ \frac{dA_2}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_2}, & \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial A_2} \end{aligned}\right.$$

besitzen das Integral

$$A_2 = \text{Constans},$$

welche Constante wir mit $\sqrt{\alpha}$ bezeichnen wollen. Ausserdem hat man das Integral

$$(4)\quad 0 = R,$$

da die entsprechende Integrationsconstante in η einbegriffen werden kann.

Die Differentialgleichungen

$$(5)\quad \frac{dA_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial A_1}$$

sind durch einige singuläre Punkte charakterisirt, welche man aus den Gleichungen

$$(6)\quad 0 = R = \frac{\partial R}{\partial A_1} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}$$

erhält. Die letzte dieser Gleichungen lautet

$$0 = \sum i\, G_i \sin i g$$

und da, wie wir oben bemerkt haben, die Glieder dieser Reihe hier sehr rasch an Grösse abnehmen, so besitzt diese Gleichung nur die Lösungen $g = k\pi\, (k = 1, 2, 3, \ldots)$ oder

$$(6^*)\quad \lambda_1 = \frac{k\pi}{s_2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Da indessen in der charakteristischen Function R die Grösse λ_1 nur in der Combination $s_2 \lambda_1$ vorkommt, so reduciren sich diese Lösungen auf die beiden folgenden:

$$(6^{**}) \qquad s_2 \lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad s_2 \lambda_1 = \pi .$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung (6) ein, so nimmt sie die Formen

$$(7) \qquad 0 = R_1 = \eta + F_0 + [F] + \sum G_i ,$$

und

$$(7^*) \qquad 0 = R_2 = \eta + F_0 + [F] + \sum (-1)^i G_i$$

an.

Indem man Λ_1 zwischen diesen Gleichungen und den Gleichungen

$$(8) \qquad 0 = \frac{\partial R_1}{\partial \Lambda_1} ,$$

$$(8^*) \qquad 0 = \frac{\partial R_2}{\partial \Lambda_1}$$

eliminirt, erhält man die Gleichungen für die beiden singulären Linien L_1 und L_2. Wir wollen diese Gleichungen *bez.* in der Form

$$(9) \qquad D_1 (\alpha , \eta) = 0 ,$$

$$(9^*) \qquad D_2 (\alpha , \eta) = 0$$

schreiben. Die Functionen D_1 und D_2 können als die Discriminanten von R_1 und R_2 angesehen werden.

Es ist nicht nothwendig, diese Discriminanten zu bilden. Wir können in der That hier die Discussion der Integrale einfacher ausführen. Wir wollen im Folgenden, der Kürze wegen, und da es übrigens hier keinen Zweck hat, mehr Glieder mitzunehmen, die Summe $\sum G_i \cos ig$ auf das erste Glied

$$G_1 \cos g = G_1 \cos s_2 \lambda_1$$

beschränken. Weiter setzen wir

(10) $$\Phi(\alpha, \Lambda_1) = F_0 + [F],$$

so dass nunmehr

(11) $$R = \eta + \Phi(\alpha, \Lambda_1) + G_1 \cos s_2 \lambda_1$$

ist, wo G_1 eine Potenzreihe in Λ_1 ist, die mit

$$B \Lambda_1^{s_2/2}$$

anfängt, wo B eine Constante bezeichnet.

Da G_1 eine sehr kleine Grösse ist, so weicht das Integral von (5) nicht viel vom Integrale der Gleichungen

(12) $$\frac{d\Lambda_1}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1}; \qquad \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_1}$$

ab. Wenigstens können wir versuchsweise von diesen Gleichungen ausgehen, um die Integrale der Gleichungen (5) zu finden.

Die Integrale der Gleichungen (12) lauten

(13) $$\begin{cases} \Lambda_1 = \text{Constans} = \Lambda_1{}^0, \\ \lambda_1 = n_1 t + c_1, \end{cases}$$

wo

(13*) $$n_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_1{}^0}$$

ist.

Die Gleichungen (5) haben die Form

$$\frac{d\Lambda_1}{dt} = -s_2 G_1 \sin s_2 \lambda_1,$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_1} - \frac{\partial G_1}{\partial \Lambda_1} \cos s_2 \lambda_1.$$

Um die Integrale dieser Gleichungen zu erhalten, setzen wir

$$\varLambda_1 = \varLambda_1^0 + \delta\varLambda_1,$$
$$\lambda_1 = n_1 t + c_1 + \delta\lambda_1,$$

und entwickeln die Function $\varPhi$ nach Potenzen von $\delta\varLambda_1$:

$$\varPhi = \varPhi_0 + \frac{\partial\varPhi_0}{\partial\varLambda_1}\delta\varLambda_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varPhi_0}{\partial\varLambda_1^2}(\delta\varLambda_1)^2 + \dots$$

Nimmt man zuerst nur auf die erste Potenz von $\delta\varLambda_1$ Rücksicht, so erhält man folgende Differentialgleichungen für $\delta\varLambda_1$ und $\delta\lambda_1$

$$\frac{d\,\delta\varLambda_1}{dt} = -s_2 G_1 \sin s_2(n_1 t + c_1),$$
$$\frac{d\,\delta\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial^2\varPhi_0}{\partial\varLambda_1^2}\delta\varLambda_1 - \frac{\partial G_1}{\partial\varLambda_1}\cos s_2\lambda_1,$$

mit den Integralen

$$(14)\quad \begin{cases} \delta\varLambda_1 = \dfrac{G_1}{n_1}\cos s_2(n_1 t + c_1), \\ \delta\lambda_1 = -\dfrac{1}{s_2 n_1}\left(\dfrac{\partial^2\varPhi_0}{\partial\varLambda_1^2}\dfrac{G_1}{n_1} + \dfrac{\partial G_1}{\partial\varLambda_1}\right)\sin s_2(n_1 t + c_1). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass $\varLambda_1$ und λ_1 in Folge des Gliedes $G_1 \cos s_2\lambda_1$ im Allgemeinen *nur kleine und periodische Abweichungen von den durch die Gleichungen (13) gegebenen Werthen erleiden.*

Dieser Schluss gilt aber nicht, wenn die Grösse n_1 sehr klein oder gar gleich Null ist, in welchem Falle die Ausdrücke (14) unendlich gross werden. Um diesen Fall zu untersuchen, gehen wir von einem solchen Werth für $\varLambda_1$ aus, für welchen n_1, d. h. $\partial\varPhi/\partial\varLambda_1$ verschwindet. Es sei $\varLambda_1 = \varrho$ ein solcher Werth, so dass

$$(15)\qquad \left(\frac{\partial\varPhi}{\partial\varLambda_1}\right)_{\varLambda_1=\varrho} = 0$$

ist. Wir haben dann

$$\Phi = \Phi_0 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_1^2}(\delta \Delta_1)^2 + \ldots,$$

wo Φ_0 und ihre Ableitungen für den Werth $\Delta_1 = \varrho$ zu berechnen sind.

Für R erhält man den Werth

$$R = \eta + \Phi_0 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_1^2}(\delta \Delta_1)^2 + G_1 \cos s_2 \lambda_1 .$$

Es sei η_1 ein solcher Werth, dass man hat

$$\eta_1 + \Phi_0 = 0 . \tag{16}$$

Dann setzen wir

$$\eta = \eta_1 + \Delta \eta ,$$

so dass die charakteristische Function die Form

$$R = \Delta \eta + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_1^2}(\delta \Delta_1)^2 + G_1 \cos s_2 \lambda_1 \tag{17}$$

bekommt und die Differentialgleichungen das Integral

$$0 = R \tag{17*}$$

besitzen.

Unsere Differentialgleichungen lauten also jetzt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,\delta \Delta_1}{dt} &= -\, s_2\, G \sin s_2 \lambda_1 , \\ \frac{d\,\delta \lambda_1}{dt} &= -\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_1^2}\,\delta \Delta_1 . \end{aligned}\right. \tag{18}$$

In R haben wir die Variation vernachlässigt, welche die Grösse G in Folge des Ueberganges vom Werthe $\Delta_1 = \varrho$ zum Werthe $\Delta_1 = \varrho + \Delta \Delta_1$ erleidet.

Die singulären Werthe von $\Delta\eta$ werden aus den Gleichungen

$$0 = R = \frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}$$

erhalten, welche geben

$$\delta \Lambda_1 = 0,$$

$$s_2 \lambda_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \pi,$$

so dass die Discriminanten lauten

$$(19) \qquad \begin{cases} 0 = D_1 = \Delta\eta + G_1, & \text{und} \\ 0 = D_2 = \Delta\eta - G_1. \end{cases}$$

Es existiren also nur die beiden singulären Punkte $\Delta\eta = -G_1$ und $\Delta\eta = +G_1$.

Aus den Gleichungen (18) und (17*) erhalten wir nun

$$(20) \qquad \frac{d\,\delta\Lambda_1}{dt} = -s_2\sqrt{G_1^2 - (\Delta\eta + \tfrac{1}{2}\Phi''(\delta\Lambda_1)^2)^2},$$

$$(20^*) \qquad \frac{d\lambda_1}{dt} = -\sqrt{-2\Phi''(\Delta\eta + G_1\cos s_2\lambda_1)}.$$

Es genügt die eine dieser Gleichungen zu integriren.

Zuerst wollen wir den Werth von Φ'' untersuchen. Es gilt vorläufig, nur das *Zeichen* dieser Grösse zu bestimmen.

Man hat hier nach (2) und der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen

$$F_0 = \frac{1}{2\left(\Lambda_2 - \frac{s_1}{s_2}\Lambda_1\right)^2} + N\left(\Lambda_2 - \frac{s_1 + s_2}{s_2}\Lambda_1\right),$$

und also ist

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda_1} = \frac{s_1}{s_2}\frac{1}{\left(\Lambda_2 - \frac{s_1}{s_2}\Lambda_1\right)^3} - \frac{s_1 + s_2}{s_2}N,$$

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda_1^2} = \frac{3 s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{\left(\Lambda_2 - \frac{s_1}{s_2}\Lambda_1\right)^4}.$$

Die Ableitungen von Φ sollen für den Werth $\Delta_1 = \varrho$ berechnet werden, welcher Werth so gewählt ist, dass $\partial\Phi : \partial\Delta_1$ verschwindet. Man hat also

$$\frac{s_1}{s_2}\frac{1}{\left(\Delta_1 - \frac{s_1}{s_2}\varrho\right)^3} - \frac{s_1 + s_2}{s_2}N + \frac{\partial[F]}{\partial\Delta_1} = 0.$$

Das letzte Glied in diesem Ausdrucke ist mit der störenden Masse multiplicirt und also sehr klein. Der Factor von $s_1 : s_2$ im ersten Glied fällt mit der osculirenden mittleren Bewegung — n — für $\Delta_1 = \varrho$ zusammen. Man hat also *genähert*

$$s_1 n - (s_1 + s_2)N = 0,$$

so dass für den betreffenden Werth von Δ_1 die mittlere Bewegung des kleinen Planeten mit derjenigen des Jupiter nahe commensurabel ist.

Die zweite Ableitung von Φ fällt sehr nahe mit der zweiten Ableitung von F_0 zusammen. Die obige Formel für F_0'' zeigt also, dass Φ'' *positiv* ist.

Wir betrachten nun die Gleichung

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{d\,\delta\Delta_1}{dt} = -\,s_2\sqrt{G_1^2 - \left(\Delta\eta + \frac{1}{2}\Phi''(\delta\Delta_1)^2\right)^2} \\ \quad = -\,\frac{s_2}{2}\Phi''\sqrt{-(\delta\Delta_1 - e_1)(\delta\Delta_1 - e_2)(\delta\Delta_1 - e_3)(\delta\Delta_1 - e_4)}, \end{cases}$$

wo

$$(21^*) \quad \begin{cases} e_1 = -\sqrt{\dfrac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}}, \\ e_2 = +\sqrt{\dfrac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}}, \\ e_3 = -\sqrt{-\dfrac{2(G_1 + \Delta\eta)}{\Phi''}}, \\ e_4 = +\sqrt{-\dfrac{2(G_1 + \Delta\eta)}{\Phi''}}. \end{cases}$$

Die singulären Werthe von $\Delta\eta$ sind nach (19) $\Delta\eta = -G_1$ und $\Delta\eta = +G_1$. Ist $\Delta\eta > G_1$ (welche Grösse wir als positiv annehmen wollen), so sind sämmtliche Wurzeln imaginär, und dann wird $d\delta\Delta_1 : dt$ auch imaginär, so dass solche Werthe von $\Delta\eta$ nicht in Betracht gezogen zu werden brauchen.

Wir haben somit folgende vier Fälle zu untersuchen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \Delta\eta < -G_1, \\ &\text{b)} \quad \Delta\eta = -G_1, \\ &\text{c)} \quad -G_1 < \Delta\eta < G_1, \\ &\text{d)} \quad \Delta\eta = G_1. \end{aligned}$$

Fall a). Die Gleichung (21) zeigt, dass $\delta\Delta_1$, wenn nicht Limitation stattfindet, zwischen den beiden grössten oder zwischen den beiden kleinsten der Wurzeln e_1, e_2, e_3, e_4 oscilliren muß. Die Grössenordnung im Falle a) ist

$$e_1 < e_3 < e_4 < e_2,$$

so dass $\delta\Delta_1$ entweder zwischen e_1 und e_3 oder zwischen e_4 und e_2 periodisch oscillirt. Die Winkelgrösse λ_1 wächst mit der Zeit ins Unendliche.

Fall b). Für $\Delta\eta = -G_1$ fallen die Wurzeln e_3 und e_4 zusammen. Es entsteht Limitation in $\delta\Delta_1$, so dass Δ_1 sich asymptotisch dem Werthe ϱ nähert, entweder von der positiven oder von der negativen Seite.

Fall c). Die Grössenordnung der Wurzeln ist hier

$$e_1 < e_2.$$

Die Wurzeln e_3 und e_4 sind imaginär. Hier oscillirt $\delta\Delta_1$ zwischen den Grenzen

$$-\sqrt{\frac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}} \quad \text{und} \quad +\sqrt{\frac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}}.$$

Die Gleichung (20*) zeigt, dass die Grösse $s_2 \lambda_1$ *nicht* mit der Zeit ins Unendliche wächst, sondern periodisch um den Werth $s_2 \lambda_1 = 180^0$ schwankt. Es findet also hier *Libration* in λ_1 statt. Wäre G_1 negativ, so würde die Libration um den Werth $\lambda_1 = 0$ stattfinden.

Ist endlich im

Fall d) $\Delta\eta = G_1$, so muss $\delta\Delta_1$ identisch gleich Null sein, und also Δ_1 identisch mit ϱ zusammenfallen.

Die *Schwingungsamplitude* im Falle a) ist

$$e_2 - e_4 = e_3 - e_1 = \sqrt{\frac{2}{\Phi''}}\left(\sqrt{G_1 - \Delta\eta} - \sqrt{-(G_1 + \Delta\eta)}\right)$$

und also dieselbe, sei es, dass $\delta\Delta_1$ zwischen e_1 und e_3 oder zwischen e_4 und e_2 oscillirt.

Im Falle c) ist diese Amplitude

$$e_3 - e_1 = 2\sqrt{\frac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}}.$$

Liegt der Werth von $\Delta\eta$ nahe dem singulären Punkt $-G_1$, so dass angenähert $\Delta\eta = -G_1$ ist, so ist die Amplitude im Falle a)

$$\sqrt{\frac{4G_1}{\Phi''}}$$

uud im Falle c)

$$2\sqrt{\frac{4G_1}{\Phi''}},$$

so dass also *beim Uebergang über den singulären Punkt vom Falle a) zum Falle c) die Schwingungsamplitude verdoppelt wird.* Der singuläre Punkt $\Delta\eta = -G_1$ ist somit ein *Discontinuitätspunkt* für die Schwingungsamplitude, der sich in ähnlicher Weise verhält, wie für den Typus 1/3 die entsprechende singuläre Linie.

Wie verhalten sich die mittleren Bewegungen von λ_1 und λ_2? Erleiden diese auch discontinuirliche Veränderungen im Punkte $\Delta\eta = -G_1$?

Die Gleichung (21) giebt uns für die halbe Schwingungsperiode T im Falle a) den Werth

$$(22) \qquad T = \frac{2}{s_2 \Phi''} \int_{e_1}^{e_3} \frac{d\,\delta \Delta_1}{\sqrt{(e_3 - \delta \Delta_1)(\delta \Delta_1 - e_1)(e_2 - \delta \Delta_1)(e_4 - \delta \Delta_1)}},$$

wenn die Schwingung zwischen e_1 und e_3 stattfindet. Würde die Schwingung zwischen e_4 und e_2 geschehen, so erhielte man die Halbperiode, wenn das obige Integral zwischen den Grenzen e_4 und e_2 genommen wird.

Wie ändert sich T, wenn $\Delta \eta$ sich dem Werthe $-G_1$ nähert? Wir reduciren das Integral auf die Normalform der elliptischen Integrale, indem wir setzen

$$(23) \qquad \delta \Delta_1 = \frac{e_1 h^2 + e_3 y^2}{h^2 + y^2},$$

wo

$$(23^*) \qquad h^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_3 - e_1}$$

ist, und erhalten dann

$$T = \frac{4}{s_2 \Phi'' \sqrt{(e_2 - e_3)(e_4 - e_1)}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}},$$

wo der Modul k den Werth

$$(24) \qquad k = \sqrt{\frac{(e_2 - e_4)(e_3 - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_2 - e_3)}} = \frac{\sqrt{G_1 - \Delta \eta} - \sqrt{-(G_1 + \Delta \eta)}}{\sqrt{G_1 - \Delta \eta} + \sqrt{-(G_1 + \Delta \eta)}}$$

hat. Wenn $\Delta \eta$ sich dem Werthe $\Delta \eta = -G_1$ nähert, so nähert sich k der Einheit und gleichzeitig wächst T über alle Grenzen. Ganz denselben Werth für T würden wir erhalten haben, wenn die Bewegung zwischen e_4 und e_2 stattfände.

Wir finden also, dass für den Fall, dass sämmtliche Wurzeln e_1, e_2, e_3 und e_4 reell sind, die Schwingungsdauer immer langsamer

wird, wenn sich $\Delta\eta$ dem singulären Punkt $\Delta\eta = -G_1$ nähert. *Die Bewegung geht allmählich und ohne Sprung in die Limitationsbewegung über.*

Wir können die Sache auch so ausdrücken, dass die mittlere Bewegung von λ_1 allmählich gegen Null geht, wenn $\Delta\eta$, allmählich wachsend, sich dem Werth $\Delta\eta = -G_1$ nähert.

Wie verhält sich die Sache im Librationsfall (also im Falle c))? Die mittlere Bewegung von λ_1 ist dann immer Null; die Grösse λ_1 schwingt aber periodisch um den Werth $\lambda_1 = 180^0$. Wie gross ist die Periode dieser Schwingung?

Die Grösse $\delta\Lambda_1$ schwankt zwischen e_1 und e_2; die Wurzeln e_3 und e_4 sind rein imaginär. Die Halbperiode T hat hier den Werth

$$T = \frac{2}{s_2 \Phi''} \int_{e_1}^{e_2} \frac{d\,\delta\Lambda_1}{\sqrt{(e_2 - \delta\Lambda_1)(\delta\Lambda_1 - e_1)(\delta\Lambda_1^2 - e_4^2)}}, \tag{25}$$

den wir mit Hilfe der Substitution

$$\delta\Lambda_1 = e_2\sqrt{1 - z^2} \tag{25*}$$

auf die Normalform bringen. Man erhält

$$T = \frac{2}{s_2\sqrt{\Phi'' G_1}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

wo

$$k = \sqrt{\frac{G_1 - \Delta\eta}{2\,G_1}} \tag{25**}$$

ist.

Wenn $\Delta\eta$ sich dem Werthe $-G_1$ nähert, so wächst der Modul k gegen die Einheit, und gleichzeitig wächst die Halbperiode T über alle Grenzen. Auch im Librationsgebiete werden also die Schwingungen immer langsamer, wenn man sich dem singulären Punkte $-G_1$ nähert. *Die Bewegung geht also auch hier continuirlich in die Limitationsbewegung über.*

Erinnern wir uns, dass nach (2)

$$\lambda_1 = -\frac{s_1}{s_2}(l + \pi - Nt) - \pi + Nt,$$

$$\lambda_2 = \quad l + \pi - Nt,$$

ist, so folgt aus dem Umstande, dass die mittlere Bewegung von λ_1 beim Durchgang durch den singulären Punkt $\varDelta\eta = -G_1$ einen regelmässigen (continuirlichen) Lauf hat, nicht, dass dies auch mit den mittleren Bewegungen von l und π der Fall ist. Damit dies eintreffe, muss die mittlere Bewegung von λ_2 eine continuirliche Function von $\varDelta\eta$ sein. Nun ist aber

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \varLambda_2} = -\frac{\partial \varPhi_0}{\partial \varLambda_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \varPhi}{\partial \varLambda_1^2 \partial \varLambda_2}(\delta \varLambda_1)^2 - \frac{\partial G_1}{\partial \varLambda_2}\cos s_2 \lambda_1 .$$

Die Frage ist, wie es sich mit dem mittleren Werth von $(\delta\varLambda_1)^2$ verhält, wenn $\varDelta\eta$ den Punkt $-G_1$ überschreitet.

Ist $\varDelta\eta < -G_1$, so lautet die Umkehrung von (21)

$$\delta\varLambda_1 = \frac{e_1 h^2 + e_2 y^2}{h^2 + y^2},$$

wo

$$y = \operatorname{sn} u$$

ist, und u den Werth

$$u = \frac{1}{4}s_2\, \varPhi''\sqrt{(e_4 - e_1)(e_2 - e_3)}\, t + \text{Constans}$$

hat.

Die Grösse $\delta\varLambda_1$ ist also eine periodische Function von u mit der Periode $2K$. Dies ist auch mit $(\delta\varLambda_1)^2$ der Fall. Wird $(\delta\varLambda_1)^2$ in eine Fourier'sche Reihe entwickelt, so ist das constante Glied in dieser Entwickelung gleich dem mittleren Werth von $(\delta\varLambda_1)^2$. Dies hat also den Werth

$$[(\delta\varLambda_1)^2] = \frac{1}{K}\int_0^K \left[\frac{e_1 h^2 + e_2 \operatorname{sn}^2 u}{h^2 + \operatorname{sn}^2 u}\right]^2 du .$$

Man kann dies Integral genau ermitteln. Es genügt aber, seinen Werth in der Nähe des Punktes $\Delta\eta = -G_1$ kennen zu lernen. Wir haben schon gesehen, dass k dann den Werth Eins bekommt. Weiter wird $k^2 = 1$ und

$$\operatorname{sn}^2 u = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\right)^2$$

und folglich

$$(25) \qquad [(\delta \Delta_1)^2] = \frac{e_2^2}{K} \int_0^K \frac{4\,du}{[e^{2u} + e^{-2u}]^2},$$

wo K ins Unendliche wächst, wenn k^2 gegen Eins convergirt. Man hat aber

$$\int \frac{4\,du}{[e^{2u} + e^{-2u}]^2} = -\frac{1}{1 + e^{4u}},$$

so dass

$$\int_0^\infty \frac{4\,du}{[e^{2u} + e^{-2u}]^2} = \frac{1}{2}$$

und somit

$$[(\delta \Delta_1)^2] = 0$$

ist.

Im Librationsfall lautet die Umkehrung von (21)

$$\delta \Delta_1 = e_2 \operatorname{cn} u_1,$$

wo

$$u_1 = s_2 \sqrt{G_1 \Phi''}\, t + \text{Constans}$$

ist, und der Modul den Werth (25**) hat. Der Mittelwerth von $(\delta \Delta_1)^2$ lautet hier

$$[(\delta \Delta_1)^2] = \frac{e_2^2}{K} \int_0^K \operatorname{cn}^2 u_1 \, du_1.$$

Man hat aber

$$\frac{1}{K} \int_0^K \operatorname{cn}^2 u_1 \, du_1 = -\frac{k'^2}{k^2} + \frac{E}{k^2 K},$$

wo K und E die elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung bezeichnen. Wenn k^2 gegen Eins geht, so nähert sich E der Einheit, wogegen K ins Unendliche wächst. Es ist also auch hier

$$[(\delta \Delta_1)^2] = 0.$$

Die mittlere Bewegung von λ_2 erleidet also keine discontinuirliche Veränderung, wenn $\Delta\eta$ den singulären Punkt $-G_1$ überschreitet.

In Bezug auf die Commensurabilitäten höherer Ordnung sind wir also zu folgenden Schlüssen gekommen:

1) Ein Glied

$$G_1 \cos(s_1 y_1 - s_2 y_2)$$

in der Störungsfunction veranlasst nur kleine periodische Veränderungen mit einer Amplitude, welche in der Nähe der Commensurabilität von der Grössenordnung $\sqrt{G_1}$ ist.

2) Die Winkelgrösse $s_1 y_1 - s_2 y_2$ wächst im Allgemeinen mit der Zeit ins Unendliche. Liegt aber die Jacobi'sche Constante η innerhalb eines gewissen (übrigens sehr kleinen) Gebietes, so entsteht *Libration* in dieser Winkelgrösse, so dass $s_1 y_1 - s_2 y_2$ um den Werth 180^0 oscillirt, wenn G_1 positiv ist. Ist G_1 negativ, geschieht die Libration um den Werth $s_1 y_1 - s_2 y_2 = 0$.

3) Beim Ueberschreiten der Grenzen dieses Gebietes, von dem „gewöhnlichen" Fall zum Librationsfall, wird die *Schwingungsamplitude von Δ_1 verdoppelt.* Die mittleren Bewegungen von l (der mittleren Anomalie) und der Perihellänge erleiden aber dabei nur continuirliche Veränderungen.

§ 7. Ueber die Darstellung der Integrale des Problems der drei Körper in rein trigonometrischer Form.

Die ersten Versuche — im achtzehnten Jahrhundert —, die Integrale des Problems der drei Körper aufzufinden, ergaben das Resultat, dass bei den Störungen der ersten Ordnung in der

Excentricität und der Neigung Glieder auftreten, welche proportional der Zeit wachsen. Durch die sog. Stabilitätsbeweise von LAPLACE und LAGRANGE ergab sich, dass diese Glieder nur als die ersten Glieder einer Potenzentwickelung von langperiodischen trigonometrischen Gliedern anzusehen sind und damit war die Möglichkeit vorhanden, die Ausdrücke für die Coordinaten der Planeten in rein trigonometrischer Form darzustellen. Die grosse Bedeutung, sowohl in theoretischer wie in praktischer Hinsicht, einer solchen Darstellungsweise liegt auf der Hand. Wenn nämlich eine beliebige Coordinate x in der Form

$$x = \sum A \cos (i_1 w_1 + i_2 w_2 + \ldots + i_s w_s)$$

dargestellt werden kann, wo $w_1, w_2, \ldots, w_s$ lineare Functionen der Zeit bezeichnen, *und wenn die Summe*

$$\sum A$$

endlich ist, so kann man erstens die Grenzwerthe der Coordinate x berechnen, womit die Stabilitätsfrage endgültig beantwortet ist, und zweitens lässt sich die obige Reihe für x für alle Werthe der Zeit anwenden. Wenn also für einen beliebigen Himmelskörper eine ähnliche Reihe abgeleitet worden ist, so ist sie für alle Zeit gültig. Die hauptsächliche Arbeit in einer Störungsrechnung bestände dann in der genauen Bestimmung der Integrationsconstanten. Jede neue Beobachtung des Gestirns liefert einen Beitrag zu dieser Constantenbestimmung und erlaubt die Coëfficienten A und die mittleren Bewegungen der „Argumente“ w_r noch genauer als vorher zu berechnen.

Ganz anders gestaltet sich eine Störungsrechnung, wenn die Coordinaten durch Reihen dargestellt werden, welche nur eine beschränkte Zeit Gültigkeit haben. Die ganze Störungsrechnung muss dann von Zeit zu Zeit wieder von Grund aus neu gemacht werden. Die *Form* der Darstellung kann zwar dieselbe bleiben, aber die Coëfficienten der verschiedenen Glieder ändern unaufhörlich ihre Werthe.

Die Versuche, den Gedanken von Laplace systematisch durchzuführen, um zu dieser trigonometrischen Form der Integrale zu gelangen, erwiesen sich indessen als mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. In seinen grossartig angelegten Untersuchungen über die Bahnen der grossen Planeten machte zwar Leverrier verschiedene Versuche, diese Schwierigkeiten zu überwinden; er musste indessen auf die trigonometrische Form der Integrale verzichten und sowohl er wie Newcomb, der auch — zum Theil gleichzeitig mit Leverrier — vollständige Untersuchungen über die Bahnen der grossen Planeten angestellt hat, mussten, wenigstens theilweise, zu Entwickelungen nach Potenzen der Zeit ihre Zuflucht nehmen.

Derjenige, der das Problem der Darstellung der Coordinaten im Drei-Körper-Problem in rein trigonometrischer Form am ernsthaftesten angegriffen hat, ist Gyldén. Seine Bestrebungen seit dem Erscheinen seiner „Undersökningar af theorien för himlakropparnes rörelser" (1881) sind in der That ausschliesslich auf dies Problem gerichtet gewesen. Viele wichtige Gesichtspunkte für die Behandlung des Problems hat er dabei entdeckt. Der Tod hat aber frühzeitig seinen Bemühungen ein Ende gesetzt, gerade als er selbst glaubte, dass seine Untersuchungen so weit forgeschritten wären, um eine Grundlage für die Berechnung der „absoluten Bahnen" (d. h. der Hauptglieder in der trigonometrischen Form der Integrale) der grossen Planeten geben zu können.

Einem Einzigen ist es gelungen, in einem speciellen Falle diese Darstellung der Coordinaten in rein trigonometrischer Form vollständig durchzuführen. Dies ist Delaunay, dem es in seiner früher citirten „Théorie du mouvement de la lune" (1860) durch eine eigenartige Methode gelang, die Coordinaten dieses Gestirns in rein trigonometrischer Form darzustellen.[1] Der praktische Erfolg seiner Methode hängt indessen zum grossen Theil davon ab, dass der störende Körper (die Sonne) sich in sehr grosser Entfernung von dem gestörten (dem Monde) bewegt, und es ist fraglich,

---

[1] Später haben Hill und nach ihm Brown in anderer Weise dasselbe Ziel erreicht.

ob die DELAUNAY'sche Methode in allgemeineren Fällen numerisch verwerthet werden kann. Wahrscheinlich wird sie sich indessen für kleine Planeten, deren mittlere Bewegungen nahe commensurabel mit derjenigen eines grossen Planeten sind, sehr tauglich erweisen (man vergleiche den früher citirten Aufsatz von HILL über diesen Gegenstand). Sieht man indessen vom praktischen Werth der Methode ab, ist die DELAUNAY'sche Methode sehr geeignet, um darzulegen, wie man in formeller Hinsicht wirklich zu einer rein trigonometrischen Form der Integrale des Problems der drei Körper gelangen kann. Dieser Nachweis ist von TISSERAND („Mémoire sur le problème des trois corps." Annales de l'observatoire de Paris, T. XVIII 1885) gegeben worden. Ohne eine vollständige Durchführung dieses Gedankens zu beabsichtigen, will ich einige Andeutungen der diesbezüglichen Rechenoperationen geben.

Ich nehme an, dass es sich um die Integration der Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_1}, & \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_2}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_2} \end{cases}$$

handelt, wo

$$(1^*)\qquad F = \Phi + \sum A_{ij} \cos(iy_1 + jy_2)$$

und Φ und A_{ij} gegebene analytische Functionen von x_1 und x_2 sind.

Aus der Störungsfunction F nehmen wir ein beliebiges Glied

$$A_{i_1 j_1} \cos(i_1 y_1 + j_1 y_2)$$

heraus, und setzen

$$F_1 = \Phi + A_{i_1 j_1} \cos(i_1 y_1 + j_1 y_2).$$

Indem wir nun zuerst die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

betrachten, können wir die hierdurch bestimmten Coordinaten als die Coordinaten einer intermediären Bahn J_1 ansehen. Durch geeignete Variation der Constanten von J_1 können die exacten Gleichungen (1) befriedigt werden.

Die Integration der Gleichungen (2) ist indessen als ein specieller Fall des Delaunay'schen Problems, dass wir in § 4 behandelt haben, zu betrachten. Setzen wir nämlich

$$(3) \qquad \begin{cases} \eta_1 = i_1\, y_1 + j_1\, y_2\,, \\ \eta_2 = i_1'\, y_1 + j_1'\, y_2\,, \end{cases}$$

wo i_1' und j_1' beliebige ganze Zahlen bezeichnen, die wir indessen, vorausgesetzt dass i_1 und j_1 relativ prim sind — was hier angenommen werden kann —, so wählen können, dass die Determinante

$$i_1 j_1' - j_1 i_1'$$

den Werth $+1$ hat, und bestimmen wir weiter zwei Grössen ξ_1 und ξ_2 aus den Relationen

$$(3^*) \qquad \begin{cases} x_1 = i_1\, \xi_1 + i_1'\, \xi_2\,, \\ x_2 = j_1\, \xi_1 + j_1'\, \xi_2\,, \end{cases}$$

so wissen wir aus § 1, dass diese Transformation die canonische Form der Differentialgleichungen nicht verändert.

Die Differentialgleichungen für ξ_1, ξ_2, η_1 und η_2 sind aber nunmehr von der Form, die wir im Delaunay'schen Problem vorausgesetzt haben. Wir können also nach § 4 (10) die Ausdrücke für die Coordinaten in der intermediären Bahn J_1 hinschreiben, nämlich

$$(4) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1 = \eta_1 + 2 \sum \dfrac{\partial B_i}{\partial \alpha_1} \sin i\,\eta_1\,, \\ -\dfrac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2 = \eta_2 + 2 \sum \dfrac{\partial B_i}{\partial \alpha_2} \sin i\,\eta_1\,, \end{cases}$$

$$(4^*)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \alpha_1 + 2\sum i B_i \cos i\eta_1, \\ \xi_2 = \alpha_2. \end{cases}$$

Wir setzen nun

$$(5)\qquad \begin{cases} \eta_1' = -\dfrac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1, \\ \eta_2' = -\dfrac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2. \end{cases}$$

Eine Umkehrung der Gleichungen (4) giebt uns für η_1, η_2, ξ_1, ξ_2 die Form

$$(6)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \eta_1' + \sum D_i \sin i\eta_1', \\ \eta_2 = \eta_2' + \sum E_i \sin i\eta_1', \end{cases}$$

$$(6^*)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \alpha_1 + \sum F_i \cos i\eta_1', \\ \xi_2 = \alpha_2, \end{cases}$$

wo indessen F_0 nicht nothwendigerweise gleich Null zu sein braucht.

Aus (3) und (3*) erhalten wir weiter unter Berücksichtigung der Voraussetzung über die ganzen Zahlen i_1' und j_1'

$$(7)\qquad \begin{cases} y_1 = j_1'\eta_1 - j_1\eta_2 \\ \quad = j_1'\eta_1' - j_1\eta_2' + \sum(j_1'D_i - j_1E_i)\sin i\eta_1', \\ y_2 = -i_1'\eta_1 + i_1\eta_2 \\ \quad = -i_1'\eta_1' + i_1\eta_2' + \sum(-i_1'D_i + i_1E_i)\sin i\eta_1' \end{cases}$$

und

$$(7^*)\qquad \begin{cases} x_1 = i_1\alpha_1 + i_1'\alpha_2 + \sum i_1 F_i \cos i\eta_1', \\ x_2 = j_1\alpha_1 + j_1'\alpha_2 + \sum j_1 F_i \cos i\eta_1'. \end{cases}$$

Zuletzt machen wir noch eine lineare Substitution, indem wir setzen

$$(8)\qquad \begin{cases} y_1' = j_1'\eta_1' - j_1\eta_2', \\ y_2' = -i_1'\eta_1' + i_1\eta_2' \end{cases}$$

und

$$\alpha_1 = \quad j_1' x_1' - i_1' x_2',$$
$$\alpha_2 = - j_1 \, x_1' + i_1 \, x_2',$$

welche Relationen auch in der Form

$$(9) \qquad \begin{cases} \eta_1' = i_1 \, y_1' + j_1 \, y_2', \\ \eta_2' = i_1' y_1' + j_1' y_2' \end{cases}$$

und

$$(9^*) \qquad \begin{cases} x_1' = i_1 \alpha_1 + i_1' \alpha_2, \\ x_2' = j_1 \alpha_1 + j_1' \alpha_2 \end{cases}$$

geschrieben werden können.

Ich behaupte nun, dass die Differentialgleichungen (1) durch das Gleichungssystem

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_1'}, & \dfrac{dy_1'}{dt} = - \dfrac{\partial F}{\partial x_1'}, \\ \dfrac{dx_2'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_2'}, & \dfrac{dy_2'}{dt} = - \dfrac{\partial F}{\partial x_2'} \end{cases}$$

ersetzt werden können.

Wir haben in der That schon gesehen, dass der Uebergang von den Variabeln

$$x_1, \; x_2, \; y_1, \; y_2$$

zu den Variabeln

$$\xi_1, \; \xi_2, \; \eta_1, \; \eta_2$$

die canonische Form unverändert lässt. Weiter zeigt das Transformationstheorem von Jacobi in § 1, dass der Uebergang von den letztgenannten Variabeln zu den Variabeln

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \eta_1', \; \eta_2'$$

auch die canonische Form beibehält. Man hat in der That nach § 4 (9)

$$\eta_1' = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \qquad \xi_1 = \frac{\partial S}{\partial \eta_1},$$

$$\eta_2' = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \qquad \xi_2 = \frac{\partial S}{\partial \eta_2},$$

wo S eine gewisse Function von η_1, η_2, α_1 und α_2 ist, die nach der Formel (8*) des genannten Paragraphen die Form

$$S = \alpha_2 \eta_2 + W(\eta_1, \alpha_1, \alpha_2)$$

hat. Nach dem Jacobi'schen Transformationstheorem bilden also α_1, α_2, η_1', η_2' auch ein canonisches System mit derselben charakteristischen Function F. Endlich lassen offenbar die linearen Substitutionen (9) und (9*) die canonische Form unverändert.

Nach (7) und (7*) sind die alten Veränderlichen x_1, x_2, y_1, y_2 mit den neuen Veränderlichen x_1', x_2' y_1', y_2' durch folgende Gleichungen verbunden

$$(11) \quad \begin{cases} y_1 = y_1' + \sum D_s' \sin s(i_1 y_1' + j_1 y_2'), \\ y_2 = y_2' + \sum E_s' \sin s(i_1 y_1' + j_1 y_2'), \\ x_1 = x_1' + \sum F_s' \cos s(i_1 y_1' + j_1 y_2'), \\ x_2 = x_2' + \sum G_s' \cos s(i_1 y_1' + j_1 y_2'), \end{cases}$$

wo s von 0 bis ∞ geht und F_0' und G_0' nicht nothwendigerweise verschwinden müssen.

Die Coëfficienten A_{ij} in der Störungsfunction sind sämmtlich mit der störenden Masse μ multiplicirt. Wäre $A_{i_1 j_1} = 0$, so würden offenbar sämmtliche Coëfficienten der periodischen Glieder in (11) verschwinden und man hätte

$$y_1 = y_1', \quad y_2 = y_2', \quad x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2'.$$

Diese Bemerkung ist von Bedeutung, wenn man die Aenderung der Störungsfunction durch die Einführung der Grössen x_1', x_2', y_1', y_2' an Stelle von x_1, x_2, y_1, y_2 beurtheilen will.

Wir wollen in der That die neue Form der Störungsfunction betrachten.

Wir setzen

$$F = F_1 + F_1'.$$

Indem wir x_1, x_2, y_1, y_2 durch die neuen Veränderlichen x_1', x_2' y_1', y_2' ausdrücken, reducirt sich F_1 nach § 4 (3*) auf eine Function von x_1' und x_2', in welcher also weder y_1' noch y_2' vorkommt. Wir setzen also

$$F_1 = \Phi_1(x_1', x_2'). \tag{12}$$

Was F_1' betrifft, so enthält diese Function alle Glieder in F mit Ausnahme der „secularen" Glieder, die in Φ enthalten sind, und des periodischen Gliedes

$$A_{i_1 j_1} \cos(i_1 y_1 + j_1 y_2).$$

Werden nun in F_1' die neuen Veränderlichen x_1', x_2', y_1', y_2' eingeführt, so nimmt F_1' die Form

$$F_1' = \sum A'_{ij} \cos(i y_1' + j y_2') \tag{13}$$

an, und nach der obigen Bemerkung über die Substitutionsreihen (11) unterscheiden sich die neuen Coëfficienten A'_{ij} von den entsprechenden Coëfficienten A_{ij} in der Reihe (1*) nur durch Grössen von der Ordnung des *Quadrates* der störenden Massen. Es kann auch eventuell in (13) ein Glied von der Form

$$A'_{i_1 j_1} \cos(i_1 y_1' + j_1 y_2')$$

vorkommen. In solchem Falle ist aber der Coëfficient dieses Gliedes mit dem Quadrat der störenden Massen multiplicirt, wogegen das Glied

$$A_{i_1 j_1} \cos(i_1 y_1 + j_1 y_2), \tag{14}$$

das wir in der intermediären Bahn J_1 mitgenommen haben, die störenden Massen in der ersten Potenz als Factor enthält.

Mit Hilfe der intermediären Bahn J_1 haben wir also eine Störungsfunction erhalten, in welcher das Glied (14) entweder nicht vorkommt, oder doch einen sehr verkleinerten Coëfficienten bekommen hat.

Wir machen jetzt eine neue DELAUNAY'sche Transformation oder *Operation*, wie DELAUNAY selbst diese Transformation nennt.

Aus der Störungsfunction F_1' wählen wir ein Glied

$$A'_{i_2 j_2} \cos(i_2 y_1' + j_2 y_2') \tag{14*}$$

und definiren eine neue intermediäre Bahn J_2 durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1'}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial y_1'}, & \frac{dy_1'}{dt} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x_1'}, \\ \frac{dx_2'}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial y_2'}, & \frac{dy_2'}{dt} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x_2'}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

wo

$$F_2 = \Phi_1 + A'_{i_2 j_2} \cos(i_2 y_1' + j_2 y_2') \tag{15*}$$

ist.

In ähnlicher Weise wie vorher können wir das Integral dieser Gleichungen in der Form

$$\left\{\begin{aligned} y_1' &= y_1'' + \sum D_s'' \sin s(i_2 y_1'' + j_2 y_2''), \\ y_2' &= y_2'' + \sum E_s'' \sin s(i_2 y_1'' + j_2 y_2''), \\ x_1' &= x_1'' + \sum F_s'' \cos s(i_2 y_1'' + j_2 y_2''), \\ x_2' &= x_2'' + \sum G_s'' \cos s(i_2 y_1'' + j_2 y_2'') \end{aligned}\right. \tag{16}$$

schreiben, und nun können wir die Differentialgleichungen (1) gegen die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1''}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_1''}, & \frac{dy_1''}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_1''}, \\ \frac{dx_2''}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_2''}, & \frac{dy_2''}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_2''}, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

vertauschen, wo nunmehr die charakteristische Function F folgende Form hat. Setzen wir

$$F = F_2 + F_2',$$

so reducirt sich F_2 auf eine Function von x_1'' und x_2''

$$F_2 = \Phi_2(x_1'', x_2'').$$

Was F_2' betrifft, so ist

$$F_2' = \sum A_{ij}'' \cos(i y_1'' + j y_2'')$$

und in dieser Summe kommen Glieder von der Form (14) und (14*) entweder gar nicht vor, oder sie haben viel kleinere Coëfficienten als in der ursprünglichen Störungsfunction.

In dieser Weise können wir fortfahren und durch neue „Operationen" das eine Glied nach dem anderen aus der Störungsfunction wegschaffen oder verkleinern.[1]

Wir nehmen an, dass wir nach einer Reihe von r solchen Operationen zu einer Störungsfunction F_r gelangt sind, in welcher die periodischen Glieder — *numerisch genommen* — so klein sind, dass man sie ganz ausser Acht lassen kann. F_r reducirt sich dann auf das seculare Glied Φ_r, das nun von den Veränderlichen $x_1^{(r)}$ und $x_2^{(r)}$ abhängt. Wir erhalten dann die Gleichungen

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{d x_1^{(r)}}{d t} = \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial y_1^{(r)}}, & \dfrac{d y_1^{(r)}}{d t} = -\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial x_1^{(r)}}, \\[2ex] \dfrac{d y_2^{(r)}}{d t} = \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial y_2^{(r)}}, & \dfrac{d y_2^{(r)}}{d t} = -\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial x_2^{(r)}}, \end{cases}$$

welche für $x_1^{(r)}$ und $x_2^{(r)}$ constante Werthe, und für $y_1^{(r)}$ und $y_2^{(r)}$ die Werthe

[1] Es ist zu bemerken, dass man gleichzeitig mit einem Glied $A\cos(i y_1 + j y_2)$ auch alle Glieder von der Form $A_s \cos s(i y_1 + j y_2)$ „wegschaffen" kann. Man vergleiche § 4.

$$
(19) \qquad \begin{cases} y_1^{(r)} = n_1 t + c_1 \,, \\ y_2^{(r)} = n_2 t + c_2 \end{cases}
$$

geben, wo man hat

$$
n_1 = - \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1^{(r)}} ; \qquad n_2 = - \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_2^{(r)}} .
$$

Führt man jetzt alle Substitutionen, welche durch die Gleichungen (11), (16) u. s. w. angedeutet sind, aus, so bekommt man endlich

$$
(20) \qquad \begin{cases} y_1 = n_1 t + c_1 + \sum D_{ij} \sin [i(n_1 t + c_1) + j(n_2 t + c_2)] \,, \\ y_2 = n_2 t + c_2 + \sum E_{ij} \sin [i(n_1 t + c_1) + j(n_2 t + c_2)] \,, \\ x_1 = \sum F_{ij} \cos [i(n_1 t + c_1) + j(n_2 t + c_2)] \,, \\ x_2 = \sum G_{ij} \cos [i(n_1 t + c_1) + j(n_2 t + c_2)] \,, \end{cases}
$$

und damit sind die Coordinaten in rein trigonometrischer Form ausgedrückt.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass es sich um Bewegungen mit nur zwei Freiheitsgraden handelt. Die obige Methode lässt sich aber offenbar auf canonische Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung anwenden. Es ist ersichtlich, dass man, allgemein genommen, für ein canonisches System mit p Freiheitsgraden auch p verschiedene sog. *Argumente*

$$
n_1 t + c_1 \,, \quad n_2 t + c_2 \,, \quad \ldots , \quad n_p t + c_p
$$

bekommt.

In V § 10 haben wir gefunden, dass die Differentialgleichungen für das Problem der drei Körper auf vier Freiheitsgrade reducirt werden können. Die Elemente

$$
\begin{matrix} L, & \Gamma, & L', & \Gamma' \\ l, & g, & l', & g' \end{matrix}
$$

des genannten Paragraphen können deswegen durch trigonometrische Reihen mit *vier* Argumenten ausgedrückt werden. Will man die

rechtwinkligen Coordinaten in ähnlicher Weise ausdrücken, so kommt noch dasjenige Argument dazu, das die mittlere Länge der gemeinsamen Knotenlinie der beiden Bahnebenen auf der unveränderlichen Ebene ausdrückt, welches Argument durch die Gleichung V § 10 (12) erhalten werden kann.

Die rechtwinkligen Coordinaten im Problem der drei Körper können also durch rein trigonometrische Reihen mit *fünf* Argumenten — die alle lineare Functionen der Zeit sind — ausgedrückt werden.

Findet die Bewegung in einer Ebene statt, so werden die Coordinaten durch trigonometrische Reihen mit *vier* Argumenten ausgedrückt.

Im asteroidischen Drei-Körper-Problem in der Ebene, mit einem störenden Körper, der sich in einem Kreis um die Sonne bewegt, lassen sich die Coordinaten durch trigonometrische Reihen mit *drei* Argumenten ausdrücken. (Bei drei Dimensionen kommt noch ein Argument dazu.)

Die geniale Methode von Delaunay ist sehr allgemein und hat ihre grossen Vorzüge vor anderen Methoden, die man versucht hat, um zu einer trigonometrischen Form der Integrale des Problems der drei Körper zu gelangen. Sie leidet aber unter zwei bedenklichen Mängeln, welche ihre Anwendung sehr beschränken müssen. Erstens ist sie in *praktischer Hinsicht* sehr mühsam und zeitraubend. Delaunay führte nicht weniger als 497 Operationen aus, bevor er eine Störungsfunction erhielt, die — innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, die er sich gesteckt hatte — keine periodischen Glieder enthielt. Eine solche Riesenarbeit mag am Platz sein, wenn es sich um die Bahn unseres Satelliten handelt. Für andere Himmelskörper müssen kürzere Methoden aufgefunden werden.

Zweitens hat man mit einem noch bedenklicheren *theoretischen* Mangel zu rechnen. Wir haben im Obigen stillschweigend vorausgesetzt, dass keine von den eingeführten intermediären Bahnen eine Libration in y_1 oder y_2 (*bez.* y_1', y_2' oder y_1'', y_2'' u. s. w.) aufzuweisen habe. Wäre dies aber der Fall, so hätte man mit der Möglichkeit zu rechnen, dass bei der Variation der Elemente einer

solchen intermediären Bahn diese Variationen uns bisweilen innerhalb der Librationsgrenze der betreffenden Bahn, bisweilen ausserhalb derselben führen würden. Wie sollte man aber in einem solchen Falle die trigonometrische Form der Integrale ableiten können? Es ist wohl zu bemerken, daß bei den hohen Commensurabilitäten solche Fälle kaum zu vermeiden sind. Damit wird aber der vermeinte Nachweis der trigonometrischen Form der Integrale des Problems der drei Körper mit Hilfe der Delaunay'schen Methode hinfällig. Ob dies Resultat in der Natur der Sache liegt, oder durch die Mängel der Methode zu erklären ist, lasse ich für den Augenblick dahingestellt.

§ 8. Ueber die Darstellung der Integrale des Problems der drei Körper in trigonometrischer Form. Fortsetzung.

Will man die Coordinaten des Drei-Körper-Problems in trigonometrischer Form ausdrücken, so muss man sich in der einen oder anderen Weise einer intermediären Bahn bedienen, deren Parameter man in solcher Weise variirt, dass man die wahre Bahncurve darstellen kann. Gewöhnlich wird zu diesem Zwecke die Kepler'sche Ellipse eingeführt. Sie ist indessen zu diesem Zwecke sehr wenig geeignet. In der That liegt eines der grössten Verdienste Gyldén's darin, dass er in verschiedenster Weise gezeigt hat, dass eine Hauptbedingung für die Convergenz der successiven Annäherungen ist, dass man schon vom Anfang an von einer *beweglichen* Ellipse ausgeht, und nicht von einer Ellipse mit stillstehender Apsidenlinie, wie der gewöhnlichen Kepler'schen Ellipse. Diesen einfachen aber wichtigen Grundgedanken findet man in der einen oder anderen Form wieder in allen Methoden, die man in letzter Zeit aufgestellt hat, um diese trigonometrische Form der Integrale abzuleiten.

In formaler Hinsicht erweist sich die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung als sehr geschmeidig, wenn man diese Integrale aufsuchen will. Sie wird auch in ausgiebiger Weise von Poincaré benutzt in seinen Untersuchungen über dieses Thema im zweiten Theil seiner „Méthodes nouvelles“. Ein grosser

Vorzug der partiellen Differentialgleichungen liegt in der fast unerschöpflichen Möglichkeit, welche sie darbieten, überzählige Integrationsconstanten einzuführen. Indem ich mich dieser Eigenschaft bediene, habe ich, von der POINCARÉ'schen Methode ausgehend, in den „Meddelanden från Lunds Observatorium" Nr. 24 gezeigt, wie man in der verschiedensten Weise zu einer trigonometrischen Form der Elemente in dem asteroidischen Drei-Körper-Problem gelangen kann. Ich werde hier diese Untersuchungen näher ausführen. Wenn ich mich dabei auf das asteroidische Drei-Körper-Problem beschränke, so beruht das nicht nur darauf, dass hierdurch die Auseinandersetzungen kürzer werden, sondern vor allen Dingen auf dem Umstand, dass bis jetzt keine praktischen Methoden vorliegen, um die Coordinaten im allgemeinen Drei-Körper-Problem numerisch in trigonometrischer Form auszudrücken. In Bezug auf die *theoretische* Möglichkeit einer solchen Darstellungsweise verweise ich auf den vorigen Paragraphen.

Wir benutzen die Variablen des § 3, also

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{a} & ; \quad y_1 = l + \pi - Nt, \\ x_2 = \sqrt{a}\,(1 - \sqrt{1-e^2}); & \quad y_2 = -\quad \pi + Nt, \end{cases}$$

und haben

$$(1^*)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ 2),$$

wo

$$F = F_0 + \mu F_1$$

ist, und F_0 den Werth

$$(2)\qquad F_0 = \frac{1}{2\,x_1{}^2} + N(x_1 - x_2)$$

hat. Die Störungsfunction F_1 hat die Form

$$(2^*)\qquad F_1 = \sum P_s^{(i)} \cos\,[i\,y_1 - s\,(y_1 + y_2)]\,.$$

Die Coëfficienten $P_s^{(i)}$ sind nach Potenzen von $\sqrt{x_2}$ entwickelt.

Wir wollen die Differentialgleichungen (1*) mit Hilfe der Hamilton-Jacobi'schen partiellen Differentialgleichung

$$(3) \qquad F\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}; y_1, y_2\right) = -C$$

integriren. Ist

$$S = S(x_1{}^0, x_2{}^0; y_1, y_2)$$

ein Integral dieser Gleichung mit den beiden unabhängigen Integrationsconstanten $x_1{}^0$ und $x_2{}^0$, so werden x_1, x_2, y_1, y_2 aus den Gleichungen

$$(3^*) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial S}{\partial x_1{}^0} = \dfrac{\partial C}{\partial x_1{}^0} t + \beta_1, & \dfrac{\partial S}{\partial y_1} = x_1, \\ \dfrac{\partial S}{\partial x_2{}^0} = \dfrac{\partial C}{\partial x_2{}^0} t + \beta_2, & \dfrac{\partial S}{\partial y_2} = x_2 \end{array} \right.$$

erhalten.

Es wird sich zeigen, dass man in verschiedener Weise S als eine periodische Function von y_1 und y_2 ausdrücken kann. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns des folgenden Kunstgriffes. Wir setzen

$$(4) \qquad R = F_0 + \mu\psi,$$

so dass

$$(4^*) \qquad F = R + \mu(F_1 - \psi)$$

ist. Hier ist unter ψ eine vorläufig vollständig unbestimmte Function von x_1 und x_2 verstanden.

Ferner setzen wr

$$(4^{**}) \qquad C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \ldots$$

und nehmen an, dass wir die Differentialgleichung (3) durch folgende Reihe integriren wollen

$$(5) \qquad S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots.$$

Zieht man die Form (4*) für F in Betracht, so erhalten wir die folgenden Differentialgleichungen zur Bestimmung von S_0, S_1, S_2 u. s. w.

$$R\left(\frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2}\right) = -C_0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2}\frac{\partial S_1}{\partial y_2} = -F_1 + \psi - C_1, \tag{7}$$

und allgemein für $p \geqq 1$:

$$\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial S_p}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2}\frac{\partial S_p}{\partial y_2} = -\Phi_p - C_p, \tag{7*}$$

wo Φ_p eine von $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ abhängige Function bezeichnet, die also durch die vorhergehenden Integrationen als bekannt angesehen werden kann.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (6) für S_0. Man kann die Lösung derselben etwa in der Form

$$S_0 = x_1{}^0 y_1 + x_2{}^0 y_2 \tag{8}$$

schreiben, wo $x_1{}^0$ und $x_2{}^0$ zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Zwischen C_0, $x_1{}^0$ und $x_2{}^0$ muss dann die Relation

$$C_0 = -R(x_1{}^0, x_2{}^0) \tag{8*}$$

bestehen. Setzen wir weiter

$$\left\{\begin{aligned} n_1{}^0 &= -\frac{\partial R}{\partial x_1{}^0} = \frac{\partial C_0}{\partial x_1{}^0}, \\ n_2{}^0 &= -\frac{\partial R}{\partial x_2{}^0} = \frac{\partial C_0}{\partial x_2{}^0}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

so können die Gleichungen für S_1 und S_p in der Form

$$n_1{}^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + n_2{}^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = F_1 - \psi + C_1, \tag{10}$$

$$n_1{}^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_1} + n_2{}^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_2} = \Phi_p + C_p \tag{10*}$$

geschrieben werden.

Betrachten wir die Form (2*) für F_1, so lässt sich offenbar das Integral von (10) in der Form

$$S_1 = \sum{}' \frac{P_s^{(i)}}{(i-s)\,n_1{}^0 - s\,n_2{}^0} \sin\,[i\,y_1 - s\,(y_1 + y_2)] \tag{11}$$

schreiben, wo der Strich oben am Summenzeichen andeutet, dass die Werthe $i = s = 0$ (gleichzeitig) auszuschliessen sind. Die Summe (11) befriedigt offenbar die Gleichung (10), vorausgesetzt, dass C_1 so gewählt worden ist, dass die von y_1 und y_2 unabhängigen Glieder auf der rechten Seite von (10) verschwinden. Bezeichnet $[F_1]$ den secularen Theil der Störungsfunction, so muss also C_1 der Bedingung

$$[F_1] - \psi(x_1{}^0,\ x_2{}^0) + C_1 = 0 \tag{12}$$

genügen.

Die Differentialgleichungen für S_2, S_3, u. s. w. sind offenbar ganz ähnlicher Art wie die Differentialgleichung für S_1. Man bekommt für Φ_p die Form

$$\Phi_p = \sum A_{i\,s}^{(p)} \cos\,[i\,y_1 - s\,(y_1 + y_2)]$$

und bezeichnet man das von y_1 und y_2 unabhängige Glied mit $[\Phi_p]$ und bestimmt C_p in solcher Weise, dass

$$[\Phi_p] + C_p = 0 \tag{13}$$

ist, so erhält man für S_p die Form

$$S_p = \sum \frac{A_{i\,s}^{(p)}}{(i-s)\,n_1{}^0 - s\,n_2{}^0} \sin\,[i\,y_1 - s\,(y_1 + y_2)]. \tag{13*}$$

Das Integral von (3) wird also von folgender Form

$$(14) \qquad S = x_1{}^0 y_1 + x_2{}^0 y_2 + \sum' B_{i,s} \sin[i y_1 - s(y_1 + y_2)],$$

wo die Coëfficienten $B_{i,s}$ nach Potenzen von μ entwickelt sind.

Die Gleichungen (3*) lauten

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x_1{}^0} t + \beta_1 = y_1 + \sum' \dfrac{\partial B_{i,s}}{\partial x_1{}^0} \sin[i y_1 - s(y_1 + y_2)], \\ \dfrac{\partial C}{\partial x_2{}^0} t + \beta_2 = y_2 + \sum' \dfrac{\partial B_{i,s}}{\partial x_2{}^0} \sin[i y_1 - s(y_1 + y_2)], \\ x_1 = x_1{}^0 + \sum' (i - s) B_{i,s} \cos[i y_1 - s(y_1 + y_2)], \\ x_2 = x_2{}^0 - \sum' s B_{i,s} \cos[i y_1 - s(y_1 + y_2)], \end{cases}$$

womit die Integrale die gesuchte rein trigonometrische Form erhalten haben.

Diese Formeln gelten, was für einen Werth der Function $\psi(x_1, x_2)$ auch zuertheilt wird. Dies ist an sich nichts Merkwürdiges, da wir nach (4) und (4*) nur die Grösse $\mu\psi$ zu F_0 hinzugefügt haben, um sie von μF_1 wieder abzuziehen. Wir werden aber finden, dass die geeignete Bestimmung der Grösse ψ von grossem Einfluss auf die Eigenschaften des Integrales S ist.

Wie ψ auch bestimmt wird, so zeigt die Formel (15), dass die *wahre mittlere Bewegung* n_1 von y_1 gleich $\partial C : \partial x_1{}^0$ und die *wahre mittlere Bewegung* n_2 von y_2 gleich $\partial C : \partial x_2{}^0$ ist. Man sagt nämlich, dass eine Winkelgrösse y die wahre mittlere Bewegung n besitzt, wenn

$$y = nt + \textit{eine periodische Function von } t$$

ist.

Weiter bemerken wir, dass die Wahl der Function ψ auf die Werthe der Grössen $n_1{}^0$ und $n_2{}^0$ Einfluss hat. Die Divisoren, welche in den Summenformeln für S_1, S_2, S_3 u. s. w. vorkommen, sind aber alle von der Form

$$(z - s) n_1{}^0 - s n_2{}^0.$$

Folglich sind die Werthe der Divisoren von der Wahl der Function ψ *abhängig.* Wir können ψ so wählen, dass diese Divisoren solche Werthe haben, dass die Reihen für S_1, S_2 u. s. w. sämtlich convergent sind. Wir können andererseits eine solche Wahl treffen, dass n_1^0 und n_2^0 mit den zur Zeit $t = 0$ osculirenden mittleren Bewegungen zusammenfallen, oder dass sie mit den *wahren* mittleren Bewegungen identisch werden, oder dass sie für eine Reihe von Werthen von x_1^0 und x_2^0 unveränderliche Werthe haben. Es empfiehlt sich, um diese verschiedenen Zwecke zu erreichen, die oben abgeleitete Methode ein wenig nach den Umständen zu variiren.

Wollen wir erreichen, dass die Reihen für S_1, S_2 u. s. w. *sämmtlich convergent sind*, so hat man nach dem Theorem von Bruns, das wir in X § 5 auseinandergesetzt haben, die Grösse ψ in solcher Weise zu wählen, dass der Quotient $n_1^0 : n_2^0$ die Wurzel einer algebraischen Gleichung mindestens zweiten Grades mit ganzzahligen Coëfficienten ist. Sämmtliche Reihen S_1, S_2 u. s. w. werden dann für diese Werthe von $n_1^0 : n_2^0$ convergiren. Hieraus folgt natürlich nicht, dass auch die Reihe

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \mu^3 S_3 + \dots$$

auch convergirt.

Will man bewirken, dass die *wahren mittleren Bewegungen* der Grössen y_1 und y_2 in die Divisoren eingehen, so kann man zweckmässig den folgenden Weg einschlagen. Man setzt

$$R = F_0 + \mu\,\Omega_1 + \mu^2\,\Omega_2 + \dots,$$

wo Ω_1, Ω_2, ... vorläufig unbestimmte Functionen von x_1 und x_2 bezeichnen. Man hat dann

$$F = R + \mu(F_1 - \Omega_1) + \mu^2(F_2 - \Omega_2) + \dots.$$

Indem man die Gleichung

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, y_1, y_2\right) = -C$$

durch die Reihe

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots$$

zu befriedigen sucht, erhält man für S_0 die Gleichung

$$R\left(\frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2}\right) = -C$$

welche giebt

$$S_0 = x_1{}^0 y_1 + x_2{}^0 y_2,$$

wo $x_1{}^0$ und $x_2{}^0$ zwei Integrationsconstanten bezeichnen.

Setzt man dann

$$n_1 = -\frac{\partial R}{\partial x_1{}^0} = \frac{\partial C}{\partial x_1{}^0},$$

$$n_2 = -\frac{\partial R}{\partial x_1{}^0} = \frac{\partial C}{\partial x_2{}^0},$$

so fallen offenbar nach (15) n_1 und n_2 mit den wahren mittleren Bewegungen von y_1 und y_2 zusammen. Die Grössen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ werden so bestimmt, dass die nicht periodischen Glieder in der Gleichung für $S_1, S_2, \ldots$ verschwinden.

Da man

$$\Omega_1 = [F_1]$$

erhält, so findet man somit den folgenden genäherten Ausdruck für die wahren mittleren Bewegungen im asteroidischen Drei-Körper-Problem:

$$n_1 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1{}^0} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1{}^0} = \frac{1}{x_1{}^{03}} - N - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1{}^0},$$

$$n_2 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_2{}^0} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2{}^0} = \qquad N - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2{}^0}.$$

Werden diese Ausdrücke mit den Formeln (1) verglichen, so findet man hieraus folgende Werthe für die mittlere Bewegung des Perihels und der mittleren Anomalie l:

$$(16)\quad \begin{cases} \left[\frac{d\pi}{dt}\right] = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2{}^0}, \\ \left[\frac{dl}{dt}\right] = \frac{1}{x_1{}^{0\,2}} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1{}^0} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2{}^0}, \end{cases}$$

welche Formeln bis zu den Gliedern der ersten Ordnung *incl.* richtig sind. Der Ausdruck für $[F_1]$ findet sich in § 3.

Eine andere Art, die Divisoren zu wählen, ist von nicht geringerem Interesse. Man kann die Grössen $n_1{}^0$ und $n_2{}^0$ so wählen, dass sie *mit den zur Zeit* $t = 0$ *osculirenden Werthen der mittleren Bewegungen von* y_1 *und* y_2 *zusammenfallen.* Man kann dies in folgender Weise erreichen.

Wir setzen

$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \ldots,$$

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots$$

und erhalten zunächst

$$F_0 \left(\frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2}\right) = - C_0,$$

woraus

$$S_0 = x_1{}^0 y_1 + x_2{}^0 y_2.$$

Wir wollen die Functionen S_1, S_2, ... so bestimmen, dass die Integrationsconstanten $x_1{}^0$ und $x_2{}^0$ mit den zur Zeit $t = 0$ osculirenden Werthen von x_1 und x_2 zusammenfallen.

Für S_1 gilt die Gleichung

$$(17)\qquad n_1{}^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + n_2{}^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = F_1 (x_1{}^0, x_2{}^0, y_1, y_2) + C_1,$$

und allgemein

$$(17^*)\qquad n_1{}^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_1} + n_2{}^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_2} = \Phi_p + C_p,$$

wo Φ_p von $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ abhängt.

Hier ist

$$(17^{**})\qquad n_1{}^0 = - \frac{\partial F_0}{\partial x_1{}^0}; \qquad n_2{}^0 = - \frac{\partial F_0}{\partial x_2{}^0}.$$

Das Integral von (17) können wir in der Form

(18) $$S_1 = \alpha_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 y_2 + \sum' B_{is}^{(1)} \sin[i y_1 - s(y_1 + y_2)]$$

schreiben, wo

(18*) $$B_{is}^{(1)} = \frac{P_s^{(i)}}{(i-s)n_1^0 - s n_2^0}$$

ist. Wir haben vorher die überzähligen Integrationsconstanten α_1, β_1, γ_1 gleich Null gesetzt, wollen aber jetzt in anderer Weise über sie verfügen. Die nämlichen Constanten können offenbar willkürlich gewählt werden, wenn nur die Relation

(18**) $$n_1{}^0 \beta_1 + n_2{}^0 \beta_2 = [F_1] + C_1$$

besteht. Diese Gleichung kann durch eine geeignete Wahl von C_1 befriedigt werden.

Nachdem S_1 bestimmt ist, erhält man S_2 in ähnlicher Weise. Wir setzen:

$$\Phi_p = \sum A_{is}^{(p)} \cos[i y_1 - s(y_1 + y_2)]$$

und erhalten dann

(19) $$S_p = \alpha_p + \beta_p y_1 + \gamma_p y_2 + \sum' B_{is}^{(p)} \sin[i y_1 - s(y_1 + y_2)],$$

wo

(19*) $$B_{is}^{(p)} = \frac{A_{is}^{(p)}}{(i-s)n_1^0 - s n_2^0}$$

ist. Die Constante C_p wird aus der Gleichung

(19**) $$n_1{}^0 \beta_p + n_2{}^0 \gamma_p = A_{00}^{(p)} + C_p$$

bestimmt.

Wir können nun S in der Form

(20) $$S = x_1{}^0 y_1 + x_2{}^0 y_2 + \alpha + \beta y_1 + \gamma y_2 + \sum' B_{is} \sin[i y_1 - s(y_1 + y_2)]$$

schreiben, wo

$$\alpha = \mu\,\alpha_1 + \mu^2\,\alpha_2 + \dots,$$

$$\beta = \mu\,\beta_1 + \mu^2\,\beta_2 + \dots,$$

$$\gamma = \mu\,\gamma_1 + \mu^2\,\gamma_2 + \dots,$$

$$B_{is} = \mu\,B_{is}^{(1)} + \mu^2\,B_{is}^{(2)} + \dots$$

ist. Aus (20) erhalten wir die Integrale

$$(21)\begin{cases} x_1 = \dfrac{\partial S}{\partial y_1} = x_1{}^0 + \beta + \sum'(i-s)\,B_{is}\cos[i y_1 - s(y_1 + y_2)], \\ x_2 = \dfrac{\partial S}{\partial y_2} = x_2{}^0 + \gamma - \sum' \qquad s\,B_{is}\cos[i y_1 - s(y_1 + y_2)] \end{cases}$$

und

$$(21^*)\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x_1{}^0}t + c_1 = y_1 + \dfrac{\partial\alpha}{\partial x_1{}^0} + \dfrac{\partial\beta}{\partial x_1{}^0}y_1 + \dfrac{\partial\gamma}{\partial x_1{}^0}y_2 \\ \qquad\qquad + \sum'\dfrac{\partial B}{\partial x_1{}^0}\sin[i y_1 - s(y_1 + y_2)], \\ \dfrac{\partial C}{\partial x_2{}^0}t + c_1 = y_2 + \dfrac{\partial\alpha}{\partial x_2{}^0} + \dfrac{\partial\beta}{\partial x_2{}^0}y_1 + \dfrac{\partial\gamma}{\partial x_2{}^0}y_2 \\ \qquad\qquad + \sum'\dfrac{\partial B}{\partial x_2{}^0}\sin[i y_1 - s(y_1 + y_2)]. \end{cases}$$

Die Grössen α, β, γ, die willkürlich sind, sollen so gewählt werden, dass für $t = 0$ $x_1 = x_1{}^0$ und $x_2 = x_2{}^0$ ist und dass ausserdem die Constanten c_1 und c_2 mit den Werthen von y_1 und y_2 für $t = 0$ zusammenfallen. Wir bezeichnen diese Werthe mit $y_1{}^0$ und $y_2{}^0$ und erhalten somit die Bedingungen

$$(22)\begin{cases} 0 = \beta + \qquad\qquad \sum'(i-s)B_{is}\cos[i y_1{}^0 - s(y_1{}^0 + y_2{}^0)], \\ 0 = \gamma - \qquad\qquad \sum' \quad s\,B_{is}\cos[i y_1{}^0 - s(y_1{}^0 + y_2{}^0)], \\ 0 = \alpha + \beta y_1{}^0 + \gamma y_2{}^0 + \sum' B_{is}\sin[i y_1{}^0 - s(y_1{}^0 + y_2{}^0)], \end{cases}$$

aus denen α, β und γ bestimmt werden sollen.

Da x_1^0 und x_2^0 die osculirenden Werthe von x_1 und x_2 sind, so ist

$$\frac{1}{x_1^{0\,2}}$$

der osculirende Werth der mittleren Bewegung von l. Folglich ist nach (1) die zur Zeit $t = 0$ osculirende mittlere Bewegung von y_1 gleich

$$\frac{1}{x_1^{0\,2}} - N = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1^0} = n_1^0$$

und die osculirende mittlere Bewegung von y_2 gleich

$$N = -\frac{\partial F_0}{\partial x_2^0} = n_2^0,$$

so dass also n_1^0 und n_2^0 in diesem Falle die zur Zeit $t = 0$ osculirenden mittleren Bewegungen von y_1 und y_2 bezeichnen.

Aus (22) erhält man

$$n_1^0\beta + n_2^0\gamma = -\sum{}'\left[(i-s)\,n_1^0 - s\,n_2^0\right] B_{is} \cos\left[i\,y_1^0 - s\,(y_1^0 + y_2^0)\right].$$

Werden die Coëfficienten der gleichen Potenzen von μ rechter und linker Hand gleich gesetzt, so erhält man hieraus nach den Gleichungen (19*) und (19**)

$$C_p = -A_{00}^{(p)} - \sum A_{is}^{(p)} \cos\left[i\,y_1^0 - s\,(y_1^0 + y_2^0)\right] = -\Phi_p(y_1^0, y_2^0).$$

Die Constanten C_p müssen also so bestimmt werden, dass die rechte Seite der Gleichung (17*) für $t = 0$ verschwindet.

Da ausserdem

$$C_0 = -F_0,$$

so hat man

$$-C = F_0 + \sum \mu^p\,\Phi^{(p)}(y_1^0, y_2^0),$$

so dass

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x_1^0} = n_1^0 - \sum \mu^p \dfrac{\partial \Phi^{(p)}}{\partial x_1^0}(y_1^0, y_2^0), \\[2ex] \dfrac{\partial C}{\partial x_2^0} = n_2^0 - \sum \mu^p \dfrac{\partial \Phi^{(p)}}{\partial x_2^0}(y_1^0, y_2^0). \end{cases}$$

Die Werthe der *wahren* mittleren Bewegungen n_1 und n_2 lassen sich leicht aus (21*) und (23) ableiten. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur die periodischen Glieder in (21*) fortzulassen und die Gleichungen nach y_1 und y_2 aufzulösen. Die Coëfficienten der Zeit in diesen Ausdrücken geben uns dann die Werthe von n_1 und n_2, und zwar bekommt man die linearen Gleichungen

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x_1^0} = \left(1 + \dfrac{\partial \beta}{\partial x_1^0}\right) n_1 + \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_1^0}\, n_2, \\[2ex] \dfrac{\partial C}{\partial x_2^0} = \dfrac{\partial \beta}{\partial x_2^0}\, n_1 + \left(1 + \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_2^0}\right) n_2. \end{cases}$$

Werden durch (23) die partiellen Ableitungen von C eliminirt, so kann man hieraus die wahren mittleren Bewegungen als Functionen der osculirenden Elemente ausdrücken.

Beschränken wir uns auf die erste Potenz der Masse, so hat man nach (23)

$$\frac{\partial C}{\partial x_1^0} = n_1^0 - \mu \sum \frac{\partial P_s^{(i)}}{\partial x_1^0} \cos\left[i y_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)\right],$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_2^0} = n_2^0 - \mu \sum \frac{\partial P_s^{(i)}}{\partial x_2^0} \cos\left[i y_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)\right].$$

Wir bemerken, dass in diesen Summen auch das Glied $s = 0,\ i = 0$ vorkommt.

Weiter ist dann nach (24) mit derselben Annäherung

$$n_1 = \frac{\partial C}{\partial x_1^0} - n_1^0 \frac{\partial \beta}{\partial x_1^0} - n_2^0 \frac{\partial \gamma}{\partial x_1^0},$$

$$n_2 = \frac{\partial C}{\partial x_2^0} - n_1^0 \frac{\partial \beta}{\partial x_2^0} - n_2^0 \frac{\partial \gamma}{\partial x_2^0}$$

und

$$n_1{}^0\beta + n_2{}^0\gamma = -\mu\sum P_s^{(i)}\cos[iy_1{}^0 - s(y_1{}^0 + y_2{}^0)].$$

Wird diese Gleichung nach $x_1{}^0$ und $x_2{}^0$ differentiirt und man beachtet, dass

$$\frac{\partial n_1{}^0}{\partial x_1{}^0} = -\frac{3}{x_1^{0\,4}}, \qquad \frac{\partial n_1{}^0}{\partial x_2{}^0} = 0,$$

$$\frac{\partial n_2{}^0}{\partial x_1{}^0} = 0, \qquad \frac{\partial n_2{}^0}{\partial x_2{}^0} = 0$$

ist, so bekommt man

$$n_1{}^0\frac{\partial\beta}{\partial x_1{}^0} + n_2{}^0\frac{\partial\gamma}{\partial x_1{}^0} = \frac{3}{x_1^{0\,4}}\beta - \mu\sum\frac{\partial P}{\partial x_1{}^0}\cos[iy_1{}^0 - s(y_1{}^0 + y_2{}^0)],$$

$$n_1{}^0\frac{\partial\beta}{\partial x_2{}^0} + n_2{}^0\frac{\partial\gamma}{\partial x_2{}^0} = \qquad -\mu\sum\frac{\partial P}{\partial x_2{}^0}\cos[iy_1{}^0 - s(y_1{}^0 + y_2{}^0)].$$

Hieraus erhält man endlich

$$(25)\quad \begin{cases} n_1 = n_1{}^0 - \mu\dfrac{\partial[F_1]}{\partial x_1{}^0} + \dfrac{3\mu}{x_1^{0\,4}}\sum\dfrac{(i-s)P}{(i-s)n_1{}^0 - sn_2{}^0}\cos[iy_1{}^0 - s(y_1{}^0 + y_2{}^0)], \\ n_2 = n_2{}^0 - \mu\dfrac{\partial[F_1]}{\partial x_2{}^0}, \end{cases}$$

welches die gesuchten Relationen zwischen den wahren mittleren Bewegungen (n_1 und n_2) und den osculirenden ($n_1{}^0$ und $n_2{}^0$) sind.

Der Unterschied zwischen den wahren mittleren Bewegungen und den osculirenden kann offenbar unter Umständen, auch für kleine μ, bedeutend werden, besonders wenn kleine Divisoren niedrigen Grades vorkommen.

Die Anwendung der osculirenden mittleren Bewegungen in den Divisoren hat nicht nur den Vortheil, dass man in dieser Weise die Berechnung der Coëfficienten in der Entwickelung der Störungsfunction direct ausführen kann, was unter Anwendung

anderer mittleren Bewegungen nicht immer ohne Umwege geschieht, sondern sie hat auch den wichtigen Vorzug, dass man die Störungen der verschiedenen Ordnungen mittelst *convergenter* Ausdrücke erhält.

Nimmt man auf die Relationen (22) Rücksicht, so bekommt man in der That beispielsweise für x_1 den Ausdruck

$$x_1 = x_1{}^0 + \mu \sum' i B_{ij}^{(1)} [\cos(i y_1 + j y_2) - \cos(i y_1{}^0 + j y_2{}^0)],$$

wo nur die Störungen erster Ordnung mitgenommen und die Indices etwas verändert sind.

In der Summe rechter Seite betrachten wir Glieder drei verschiedener Arten und setzen

$$\sum' i B_{ij} [\cos(i y_1 + j y_2) - \cos(i y_1{}^0 + j y_2{}^0)] = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 .$$

In Σ_1 nehmen wir alle solche Glieder auf, die bei einer (gedachten) numerischen Berechnung thatsächlich mitgenommen werden. Die Summe Σ_2 umfasst alle solchen Glieder, in denen die kleinen Divisoren nicht unter eine bestimmte endliche untere Grenze sinken. Da die Summe $\Sigma P_{i,j}^{(i)}$ convergent gedacht wird, so kann also Σ_2 für beliebige y_1 und y_2 einen bestimmten endlichen Werth nicht überschreiten. Die Summe Σ_3 enthält die sog. kritischen Glieder, die mit kleinen Divisoren verschiedener Ordnungen behaftet sind. Wir wollen zeigen, dass Σ_3 *für endliche Werthe der Zeit* einen endlichen Werth nicht überschreiten kann.

Es ist in der That

$$\Sigma_3 = -\mu \Sigma \frac{2 i P}{i n_1{}^0 + j n_2{}^0} \sin\left(i \frac{y_1 + y_1{}^0}{2} + j \frac{y_2 + y_2{}^0}{2}\right)$$
$$\times \sin\left(i \frac{y_1 - y_1{}^0}{2} + j \frac{y_2 - y_2{}^0}{2}\right).$$

Nun ist aber für kleine Werthe der Zeit genähert

$$y_1 = y_1{}^0 + n_1{}^0 t,$$
$$y_2 = y_2{}^0 + n_2{}^0 t,$$

wo n_1^0 und n_2^0 die osculirenden mittleren Bewegungen bezeichnen, und folglich bekommt man für Σ_3 den genäherten Werth

$$\Sigma_3 = -\mu t \sum i P \sin\left(i \frac{y_1 + y_1^0}{2} + j \frac{y_2 + y_2^0}{2}\right),$$

welche Summe endlich ist. Die kleinen Divisoren bewirken also nicht die Divergenz der Reihe für x_1 — wenigstens nicht für kleine Werthe der Zeit —, dagegen sehen wir, dass die Wirkung dieser Glieder dieselbe ist, als ob in x_1 und x_2 *seculare Glieder* unbekannter Grösse vorhanden wären. Ist die numerische Rechnung nicht genügend umfassend, so dass kritische Glieder niedrigen Grades in Σ_3 vorkommen, so wird der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung sich bald als proportional der Zeit zeigen. Ist die numerische Rechnung dagegen hinreichend weit getrieben, werden die kleinen Divisoren sich erst nach Hunderten oder Tausenden von Jahren bemerkbar machen.

Führen wir in y_1 und y_2 die Werthe von α, β und γ ein und machen wir dieselbe Eintheilung der Glieder wie oben, so finden wir, dass die kleinen Divisoren hier bewirken, dass der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung, in Bezug auf y_1 und y_2, proportional der *zweiten* Potenz der Zeit wächst, oder wenigstens wachsen kann. Ist die Summe

$$\Sigma B_{ij} \quad bez. \quad \Sigma \frac{\partial B_{ij}}{\partial x}$$

convergent, so muss Σ_3 immer unterhalb einer endlichen Grenze bleiben.

Die obigen Betrachtungen beziehen sich nur auf die Störungen erster Ordnung. In Bezug auf die Störungen höherer Ordnung gelten indessen ähnliche Schlussfolgerungen, nur das hier höhere Potenzen von t (oder richtiger von μt) zum Vorschein kommen.

Man vergleiche in Bezug auf diese Auseinandersetzungen die Betrachtungen in X § 6 über die Reihen in der gewöhnlichen Störungstheorie.

Die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung erlaubt, wie wir gesehen haben, eine grosse Freiheit in der Wahl der Integrationsconstanten. Ich will zuletzt noch eine solche Wahl erwähnen, die bei einer *systematischen* Berechnung der Störungen der kleinen Planeten von grosser Bedeutung ist.

In der Methode von BOHLIN, die wir im nächsten Paragraphen näher besprechen wollen, werden bekanntlich die Störungen einer Gruppe Planeten an bestimmte Werthe der Integrationsconstanten geknüpft, für welche die mittleren Bewegungen der Planeten eben commensurabel sind. Es ist indessen keineswegs nothwendig, solche Gruppenstörungen an eine Commensurabilitätsstelle anzuschliessen, sondern man kann ebenso wohl von ganz beliebigen Werthen der Elemente ausgehen und an dieselben die Störungen einer Gruppe Planeten anschliessen. Es ist sogar im Allgemeinen vortheilhafter, eine Nicht-Commensurabilitätsstelle zu wählen, da man dann die Function S nach Potenzen von μ, und nicht von $\sqrt{\mu}$, entwickeln kann. Auch in anderer Hinsicht ist es nur in Ausnahmefällen vorzuziehen, Gruppenstörungen an eine Commensurabilitätsstelle anzuschliessen.

Wir setzen nochmals

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots,$$

$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \dots$$

und erhalten zuerst

$$F_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2}\right) = -C_0,$$

woraus folgt

$$S_0 = x_1{}^0 y_1 + x_2{}^0 y_2 .$$

Weiter hat man

$$n_1{}^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + n_2{}^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = F_1(x_1{}^0, x_2{}^0; y_1, y_2) + C_1,$$

eine Gleichung, deren Integral wir in der Form

$$S_1 = \beta_1 y_1 + \gamma_1 y_2 + \textit{periodische Function von } y_1 \textit{ und } y_2$$

schreiben.

Wir können nun den beiden Constanten x_1^0 und x_2^0 beliebig numerische Werthe zuertheilen und β *und* γ *als Integrations constanten betrachten.* Praktisch genommen setzt dies offenba voraus, dass man den Grössen β und γ nicht allzu gross Werthe giebt.

Für C_1 wird ein solcher Werth gewählt, dass

$$n_1^0 \beta_1 + n_2^0 \gamma_1 = [F_1] + C_1$$

ist.

Die Bestimmung von S_2 und S_3 u. s. w. geschieht dann in gewöhnlicher Weise, etwa nach der Formel (10*), und man kann jedesmal die $S_p (p \geqq 2)$ in rein trigonometrischer Form schreiben.

Da es hier bisweilen nothwendig wird, die Glieder zweiter Ordnung zu berücksichtigen, so wollen wir die Differentialgleichung für S_2 betrachten. Man hat

$$\Phi_2 = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} \frac{\partial S_1}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_2}\right)^2 \right\}$$
$$+ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial S_1}{\partial y_2} + F_2 .$$

Im asteroidischen Drei-Körper-Problem ist nach (2)

$$F_2 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2} = \frac{3}{x_1^4},$$

so dass

$$\Phi_2 = \frac{3}{2 x_1^{04}} \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial S_1}{\partial y_2}$$

ist.

Schreiben wir

$$F_1 = \sum A_{ij} \cos (i y_1 + j y_2),$$

so ist

$$S_1 = \beta y_1 + \gamma y_2 + \sum \frac{A_{ij}}{i n_1^0 + j n_2^0} \sin (i y_1 + j y_2),$$

wo A_{ij}, $n_1{}^0$ und $n_2{}^0$ für die Werthe $x_1 = x_1{}^0$, $x_2 = x_2{}^0$ zu berechnen sind.

Man hat also

$$\frac{\partial S_1}{\partial y_1} = \beta + \sum' \frac{i A_{ij}}{i n_1{}^0 + j n_2{}^0} \cos(i y_1 + j y_2),$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial y_2} = \gamma + \sum' \frac{j A_{ij}}{i n_1{}^0 + j n_2{}^0} \cos(i y_1 + j y_2),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1} \cos(i y_1 + j y_2),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \sum \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2} \cos(i y_1 + j y_2).$$

Wir bemerken, dass Φ_2 eine Function zweiten Grades in β und γ ist. Da wir indessen die Constante C_2 so bestimmen wollen, dass die constanten Glieder in $\Phi_2 + C_2$ verschwinden, so erscheint $\Phi_2 + C_2$ als eine lineare Function von β und γ von der Form

$$\Phi_2 + C_2 = T^{(1)} + \beta T^{(2)} + \gamma T^{(3)}$$

und hier ist

$$T^{(2)} = \sum' \left[\frac{3}{x_1{}^{04}} \frac{i A_{ij}}{i n_1{}^0 + j n_2{}^0} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1}\right] \cos(i y_1 + j y_2),$$

$$T^{(3)} = \sum \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2} \cos(i y_1 + j y_2).$$

In denjenigen Fällen, wo man, bei einer direkten Berechnung der Störungen, die Störungen zweiter Ordnung nicht zu berücksichtigen braucht, ist es erlaubt $T^{(1)}$ — welche Function etwas mühsamer zu berechnen ist — zu vernachlässigen und

$$\Phi_2 + C_2 = \beta T^{(2)} + \gamma T^{(3)}$$

zu setzen.

Bei der Anwendung dieser Methode zur systematischen Berechnung der Störungen der kleinen Planeten giebt man der Grösse $x_1{}^0$ eine Reihe äquidistanter Werthe und berechnet die

entsprechenden Werthe von A_{ij} und ihren Ableitungen. Die nämlichen Grössen erscheinen als Potenzreihen in x_2^0, welche Grösse man unbestimmt lassen kann. Ich habe numerische Rechnungen für die kleinen Planeten nach dieser Methode angefangen, bin aber noch nicht so weit fortgeschritten, dass ich einige Beispiele zur Erläuterung der Methode mittheilen kann.

§ 9. Ueber die Darstellung der Integrale des Problems der drei Körper in trigonometrischer Form. Zweite Fortsetzung.

Ist die algebraische Relation

$$F(x,\ y) = F_0(x) + \mu F_1(x,\ y) - C = 0 \tag{1}$$

zwischen x und y gegeben, so giebt es im Allgemeinen eine Wurzel dieser Gleichung, die nach Potenzen von μ, in der Umgebung von $\mu = 0$, entwickelt werden kann. Ist nämlich x_0 einer der Werthe von x, welche der Gleichung

$$F_0(x_0) - C = 0$$

genügen, und setzt man

$$x = x_0 + \delta x,$$

so bekommt (1) die Form

$$0 = \frac{\partial F_0}{\partial x_0}\delta x + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_0^2}(\delta x)^2 + \ldots + \mu F_1(x_0, y) + \mu\frac{\partial F_1}{\partial x_0}\delta x + \ldots;$$

δx kann also, für kleine Werthe von μ, nach positiven Potenzen von μ entwickelt werden, *vorausgesetzt, dass nicht*

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_0} = 0 \tag{2}$$

ist. Hat aber C einen solchen Werth, dass die Gleichung (2) befriedigt ist, so kann δx nicht mehr nach Potenzen von μ ent-

wickelt werden, wohl aber ***existirt dann eine Entwickelung von δx nach den Potenzen von $\sqrt{\mu}$.***

Läge statt der algebraischen Gleichung (1) eine *Differentialgleichung* von der Form

$$(3) \qquad 0 = F_0\left(\frac{\partial S}{\partial y}, y\right) = F_0\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) + \mu F_1\left(\frac{\partial S}{\partial y}, y\right) - C$$

vor, so existirt *im Allgemeinen* eine Lösung

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots,$$

wo $S_0, S_1, S_2, \ldots$ Functionen von y sind, also eine Lösung, die nach den Potenzen von μ entwickelt erscheint. Ist aber die Gleichung (2) erfüllt, so ist die entsprechende Lösung von (3) von der Form

$$(4) \qquad S = S_0 + \sqrt{\mu}\, S_1 + \mu S_2 + \mu\sqrt{\mu}\, S_3 + \ldots.$$

Aehnliches gilt, wenn, statt der ordinären Differentialgleichung (3), eine *partielle* Differentialgleichung für S mit zwei oder mehreren unabhängigen Veränderlichen $y_1, y_2, y_3, \ldots$ vorgelegt wäre, und F_0 nur von

$$\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, \frac{\partial S}{\partial y_3}, \ldots$$

nicht aber explicite von y_1, y_2, y_3 abhängig ist. Nur bekommt hier die Bedingung (2) eine andere Formulirung.

Kehren wir zum asteroidischen Drei-Körper-Problem zurück, so ist F_1 eine periodische Function von y_1 und y_2, mit der Periode 2π in beiden. Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass man durch eine geeignete Wahl der willkürlichen Function $\psi(x_1^0, x_2^0)$ bewirken kann, dass die Grössen n_1^0 und n_2^0, welche in den Divisoren

$$i n_1^0 + j n_2^0$$

eingehen, beliebige Werthe annehmen, was für einen Werth auch die Integrationsconstanten x_1^0 und x_2^0 haben mögen. Wir haben auch gefunden, dass das Integral S der HAMILTON-JACOBI'schen Differentialgleichung

$$F_0\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}\right) + \mu F_1\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}; y_1, y_2\right) = -C \tag{5}$$

im Allgemeinen befriedigt wird durch eine Reihe

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots, \tag{6}$$

die nach den Potenzen von μ fortschreitet.

Im vorigen Paragraphen haben wir aber auch gesehen, dass dies nicht mehr gilt, wenn zwischen den Ableitungen

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_1^0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_0}{\partial x_2^0}$$

eine lineare Relation mit ganzzahligen Coëfficienten besteht.

Das Integral lässt sich alsdann nach Potenzen von $\sqrt{\mu}$ entwickeln. Dies wurde zuerst von BOHLIN gezeigt in seiner Abhandlung: „Ueber eine neue Annäherungsmethode in der Störungstheorie" (1888). Seine Methode ist von POINCARÉ im zweiten Band seiner „Méthodes nouvelles" zum Gegenstand eines eingehenden Studiums gemacht worden.

Führen wir die Function ψ des vorigen Paragraphen ein, so dass

$$F = R_0 + \mu(F_1 - \psi) \tag{7}$$

und

$$R_0 = F_0 + \mu\psi \tag{7*}$$

ist, so nehmen wir an, dass die willkürliche Function ψ einen solchen Werth erhalten hat, dass

$$i_0 n_1^0 + j_0 n_2^0 = 0 \tag{8}$$

ist, wo gesetzt ist:

$$(8^*) \qquad n_1^0 = -\frac{\partial R}{\partial x_1^0}, \quad n_2^0 = -\frac{\partial R}{\partial x_2^0}.$$

In der Gleichung (8) bedeuten i_0 und j_0 zwei ganze Zahlen. Was für einen Werth auch die *wahren* mittleren Bewegungen von y_1 und y_2 haben, immer kann man $\psi(x_1, x_2)$ so wählen, dass eine Gleichung von der Form (8) befriedigt wird.

Wir machen jetzt eine lineare Transformation:

$$(9) \qquad \begin{cases} \eta_1 = i_0 y_1 + j_0 y_2, & x_1 = i_0 \xi_1 + i_0' \xi_2, \\ \eta_2 = i_0' y_1 + j_0' y_2, & x_2 = j_0 \xi_1 + j_0' \xi_2, \end{cases}$$

welche die canonische Form nicht verändert. Die Zahlen i_0' und j_0' werden so gewählt, dass

$$i_0 j_0' - j_0 i_0' = +1$$

ist. Hierdurch erreicht man, dass die Störungsfunction auch eine periodische Function von η_1 und η_2 wird mit der Periode 2π. Setzen wir

$$(10^*) \qquad F = R_0 + \mu R_1,$$

so ist also

$$(10) \qquad R_1 = \sum A_{ij} \cos(i\eta_1 + j\eta_2),$$

wo A_{ij} von ξ_1 und ξ_2 abhängig sind.

Man hat nun

$$\frac{\partial R_0}{\partial \xi_1} = i_0 \frac{\partial R_0}{\partial x_1} + j_0 \frac{\partial R_0}{\partial x_2}$$

und also ist nach (8)

$$(11) \qquad \frac{\partial R_0}{\partial \xi_1^0} = 0,$$

wenn ξ_1^0, ξ_2^0 die Werthe von ξ_1 und ξ_2 sind, welche den Werthen $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ entsprechen.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$12)\qquad R\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S}{\partial \eta_2}\right) + \mu R_1\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S}{\partial \eta_2}; \eta_1, \eta_2\right) = -C$$

und suchen dieselbe mit der Reihe

$$(12^*)\qquad S = S_0 + \sqrt{\mu}\, S_1 + \mu S_2 + \mu\sqrt{\mu}\, S_3 + \dots$$

zu befriedigen, indem wir gleichzeitig

$$(12^{**})\qquad C = C_0 + \mu C_2 + \mu^2 C_4 + \dots$$

setzen.

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnung

$$(13)\qquad v_2{}^0 = -\frac{\partial R_0}{\partial \xi_2{}^0}$$

ein.

Die Differentialgleichung für S_0 lautet

$$R_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S_0}{\partial \eta_2}\right) = -C_0;$$

wir nehmen an, dass die Lösung derselben in der Form

$$(14)\qquad S_0 = \xi_1{}^0 \eta_1 + \xi_2{}^0 \eta_2$$

geschrieben wird. Folglich hat man

$$(14^*)\qquad R_0(\xi_1{}^0, \xi_2{}^0) = -C_0.$$

Die Einführung der Hilfsfunction ψ hat den Vortheil, *dass man $\xi_1{}^0$ und $\xi_2{}^0$ willkürlich wählen und somit als Integrationsconstanten betrachten kann.* Nachdem $\xi_1{}^0$ und $\xi_2{}^0$ gewählt worden sind, erhält man den entsprechenden Werth von ψ aus der Gleichung (11).

Wird die Reihe (12*) in (12) eingeführt, erhält man nun die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von S_1, S_2, S_3 u. s. w.

$$\text{(I)} \quad \nu_2{}^0 \frac{\partial S_1}{\partial \eta_2} = 0,$$

$$\text{(II)} \quad \nu_2{}^0 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1{}^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^2 + R_1 + C_2,$$

$$\text{(III)} \quad \nu_2{}^0 \frac{\partial S_3}{\partial \eta_2} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1{}^2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} + \tfrac{1}{6} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1{}^3} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^3,$$

$$\text{(IV)} \quad \nu_2{}^2 \frac{\partial S_4}{\partial \eta_2} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1{}^2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_3}{\partial \eta_1} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1{}^2} \left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta_1}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_3}{\partial \eta_2} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_2{}^2} \left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta_2}\right)^2$$

$$+ \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1{}^3} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^2 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^2 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} + C_4.$$

Die Gleichung (I) lässt sich durch eine beliebige Function von η_1 befriedigen. Es sei

$$(15) \qquad S_1 = S_1(\eta_1)$$

diese Lösung. *Die Function S_1 wird so bestimmt, dass die Glieder in der rechten Seite von (II), welche im Argumente der trigonometrischen Functionen nur η_1 und nicht η_2 enthalten, verschwinden.* Ist Φ eine beliebige Function von der Form

$$\Phi = a\eta_1 + b\eta_2 + \sum \gamma_{ij} \sin(i\eta_1 + j\eta_2)$$

oder von der Form

$$\Phi = \sum \delta_{ij} \cos(i\eta_1 + j\eta_2),$$

so werden wir mit (Φ) die Summe derjenigen Glieder in Φ bezeichnen, welche nur η_1 enthalten, so dass also im vorigen Falle

$$(\Phi) = a\eta_1 + \sum \gamma_{i0} \sin i\eta_1$$

und im späteren Falle

$$(\Phi) = \sum \delta_{i0} \cos i\eta_1$$

ist.

Wir bestimmen also S_1 so, dass

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^2 + (R_1) + C_2 = 0 \tag{16}$$

ist.

Die Function S_2 wird dann aus der Gleichung

$$\nu_2{}^0 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} = R_1 - (R_1) = \sum{}' A_{ij} \cos(i\eta_1 + j\eta_2)$$

bestimmt; der Strich oben am Summenzeichen bedeutet hier, dass alle solche Glieder in der Summe auszuschliessen sind, wo $j = 0$ ist.

Das Integral dieser Gleichung lautet

$$S_2 = \frac{1}{\nu_2{}^0}\sum{}' \frac{1}{j} A_{ij} \sin(i\eta_1 + j\eta_2) + (S_2), \tag{17}$$

wo die Function (S_2) nur von η_1 abhängig, und vorläufig unbestimmt ist. Sie wird in solcher Weise gewählt, dass die von η_2 unabhängigen Glieder in (III) verschwinden.

Zu diesem Zweck muss die Gleichung

$$0 = \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2}\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial (S_2)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1^3}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^3$$

oder

$$0 = \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2}\frac{\partial (S_2)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1^3}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^2 \tag{18}$$

erfüllt sein. Nach (16) hat diese Gleichung die Form

$$0 = \left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2}\right)^2 \frac{\partial (S_2)}{\partial \eta_1} - \frac{1}{3}\frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1^3}\left((R_1) + C_2\right), \tag{18*}$$

welche giebt

$$(S_2) = \alpha_2 \eta_1 + \frac{R_0'''}{3 R_0''^2} \sum \frac{1}{i} A_{i0} \sin i \eta_1 ,$$

wo α_2 eine Constante bezeichnet, deren Werth von C_2 abhängig ist.

Bei der Integration von (III) wird eine willkürliche Function von η_1 in S_3 eingeführt, die so bestimmt wird, dass alle von η_1 allein abhängigen Glieder in der rechten Seite von (IV) verschwinden. Indem man in dieser Weise fortfährt, erhält man wie im vorigen Paragraphen S in der Form

$$S = \alpha \eta_1 + \beta \eta_2 + \sum B_{ij} \sin (i \eta_1 + j \eta_2), \tag{19}$$

oder, wenn die Grössen y_1 und y_2 wieder eingeführt werden,

$$S = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \sum B'_{ij} \sin (i y_1 + j y_2).$$

Wir erhalten also eine Lösung in rein trigonometrischer Form, aber *die kleinen Divisoren kommen hier nicht mehr zum Vorschein.*

Ziehen wir die erhaltene Lösung etwas näher in Betracht!

Die Operationen, die man auszuführen hat, sind im Allgemeinen von derselben Natur wie im vorigen Paragraphen. Eine Ausnahme macht die Gleichung (16) für S_1. Diese hat die Form

$$\tfrac{1}{2} R_0'' \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^2 = - C_2 - \sum A_{i0} \cos i \eta_1 .$$

Ist $C_2 + A_{00}$ hinreichend gross, so erhält man hieraus

$$S_1 = \alpha_1 \eta_1 + \sum B_i \sin i \eta_1 .$$

Wenn aber $\sum' |A_{i0}| > |C_2 + A_{00}|$ ist, so sind die Schwankungen von η_1 zu einem Theil des Umkreises begrenzt, und man hat *Libration* in η_1.

Wir wollen den vorigen Fall näher betrachten.

Indem wir ξ_1^0 und ξ_2^0 als Integrationsconstanten betrachten, lauten nunmehr die Gleichungen zur Bestimmung von ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 folgendermassen:

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_1} = \xi_1 = \alpha + \sum i B_{ij} \cos(i\eta_1 + j\eta_2),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_2} = \xi_2 = \beta + \sum j B_{ij} \cos(i\eta_1 + j\eta_2),$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_1^0} t + c_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1^0}\eta_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_1^0}\eta_2 + \sum \frac{\partial B}{\partial \xi_1^0}\sin(i\eta_1 + j\eta_2),$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_2^0} t + c_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_2^0}\eta_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_2^0}\eta_2 + \sum \frac{\partial B}{\partial \xi_2^0}\sin(i\eta_1 + j\eta_2).$$

Die wahren mittleren Bewegungen ν_1 und ν_2 von η_1 und η_2 erhält man aus den Gleichungen

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_1^0} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1^0}\nu_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_1^0}\nu_2,$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_2^0} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_2^0}\nu_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_2^0}\nu_2.$$

Sie werden als Reihen dargestellt, welche nach den positiven Potenzen von $\sqrt{\mu}$ fortschreiten. Von derselben Form sind auch die Coëfficienten B_{ij}.

Da die kleinen Divisoren, welche ein Haupthinderniss für die Convergenz in den gewöhnlichen Methoden bilden, hier gar nicht auftreten, könnte man meinen, dass es hier mit der Convergenz besser bestellt wäre, als es mit den Reihen des vorigen Paragraphen der Fall war. In der That findet man auch, dass die Reihen für S_1, S_2, S_3 u. s. w. hier convergiren, wenn die Entwickelung der Störungsfunction convergent ist. Wir haben aber gesehen, dass ähnliches auch bei den Reihen des vorigen Paragraphen erreicht werden kann. Daraus wissen wir aber noch nichts über die Convergenz der Reihe

$$S_0 + \sqrt{\mu} S_1 + \mu S_2 + \mu\sqrt{\mu} S_3 + \ldots, \tag{20}$$

und in der That hat POINCARÉ bewiesen, dass diese Reihe zu den divergenten Reihen gehört.

Es ist leicht einzusehen, wie diese Divergenz zu Stande gebracht wird.

Wir wollen zu diesem Zweck ein beliebiges Glied

$$A\cos(i\eta_1 + j\eta_2)$$

aus der Störungsfunction herausgreifen. Dasselbe giebt zu einem Glied

$$B\sin(i\eta_1 + j\eta_2)$$

in S Veranlassung. Wir wollen nun die Form von B untersuchen.

In S_2 erhalten wir ein Glied

$$\frac{A}{\nu_2^0 j}\sin(i\eta_1 + j\eta_2)$$

und daraus

$$\frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} = \frac{A}{\nu_2^0}\,\frac{i}{j}\cos(i\eta_1 + j\eta_2)\,.$$

Bezeichnet man das constante Glied in $\partial S_1 : \partial \eta_1$ mit β, so entsteht hieraus nach (III) in S_3 ein Glied von der Form

$$\beta\,\frac{R_0''}{\nu_2^0}\,\frac{A}{\nu_2^0}\,\frac{i}{j^2}\sin(i\eta_1 + j\eta_2)$$

und also

$$\frac{\partial S_3}{\partial \eta_1} = \beta\,\frac{R_0''}{\nu_2^0}\,\frac{A}{\nu_2^0}\,\frac{i^2}{j^2}\cos(i\eta_1 + j\eta_2)\,.$$

In $\partial S_4 : \partial \eta_1$ bekommt man in derselben Weise ein Glied

$$\frac{\partial S_4}{\partial \eta_1} = A\beta^2\,\frac{R_0''^2}{\nu_2^{0\,3}}\,\frac{i^3}{j^3}\cos(i\eta_1 + j\eta_2)\,.$$

Folglich giebt es in S ein Glied

$$B \cos(i \eta_1 + j \eta_2),$$

wo der Coëfficient B nach Potenzen von

$$\varkappa = \sqrt{\mu} \frac{\beta R_0''}{\nu_2^0} \frac{i}{j}$$

entwickelt ist; was für einen Werth auch die Grössen μ, β, R_0'' und ν_2^0 haben, immer können wir solche Werthe von i und j aufsuchen, wo $\varkappa$ einen beliebig hohen Werth hat, so dass B durch eine divergente Reihe dargestellt wird.

Sachregister.

Berichtigungen zum ersten Bande.

Seite 92. Zeile 4 von oben statt u lies: w.

„ 93. Zeile 2 von unten statt $\int\limits_0^\pi$ lies: $\int\limits_0^T$

„ 103. Zeile 5, 6, 7 von oben statt $F_{11}\, d w_1 + \ldots + F_{n1}\, d w_n$ lies: $F_{11}\, \beta_1\, d w_1 + \ldots + F_{n1}\, \beta_n\, d w_n$.

„ 109. Zeile 9 von oben statt $A_2 + s_1$ lies: $A_2 + s_2$.

„ 150. Zeile 15 von oben statt relative lies: nicht relative.

„ 232. Zeile 1 von oben statt $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ lies: $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$.

„ 247. Zeile 6 von oben statt W lies: W_1.

„ 247. Zeile 8 von oben statt W lies: W_2.

„ 261. Zeile 5 von unten statt m_a lies: μ_b.

„ 261. Zeile 5 von unten statt m_b lies: μ_a.

„ 307. Zeile 11 von unten statt $r_{ga}{}^2$ lies: $r_{ga}{}^3$.

„ 310. Zeile 10 von oben statt $m_a\, m_b$ lies: $k^2\, m_a\, m_b$.

„ 340. Zeile 2 von unten statt k^2 lies: $\frac{1}{2} k^2$.

„ 389. Zeile 5 von unten statt $M_6{}^{VII}$ lies: $M_7{}^{VII}$.

„ 390. Zeile 21 von oben statt Saturn lies: Uranus.

„ 411. Zeile 5 von unten statt $\frac{\beta}{\mu \Delta^2}$ lies: $\frac{\beta}{2\mu \Delta^2}$.

„ 421. Zeile 8 von unten statt π^{IV} lies: π^{V}.

„ 428. Zeile 5 von oben statt $-\sqrt{\frac{F}{c}}$ lies: $\sqrt[3]{\frac{F}{c}}$.

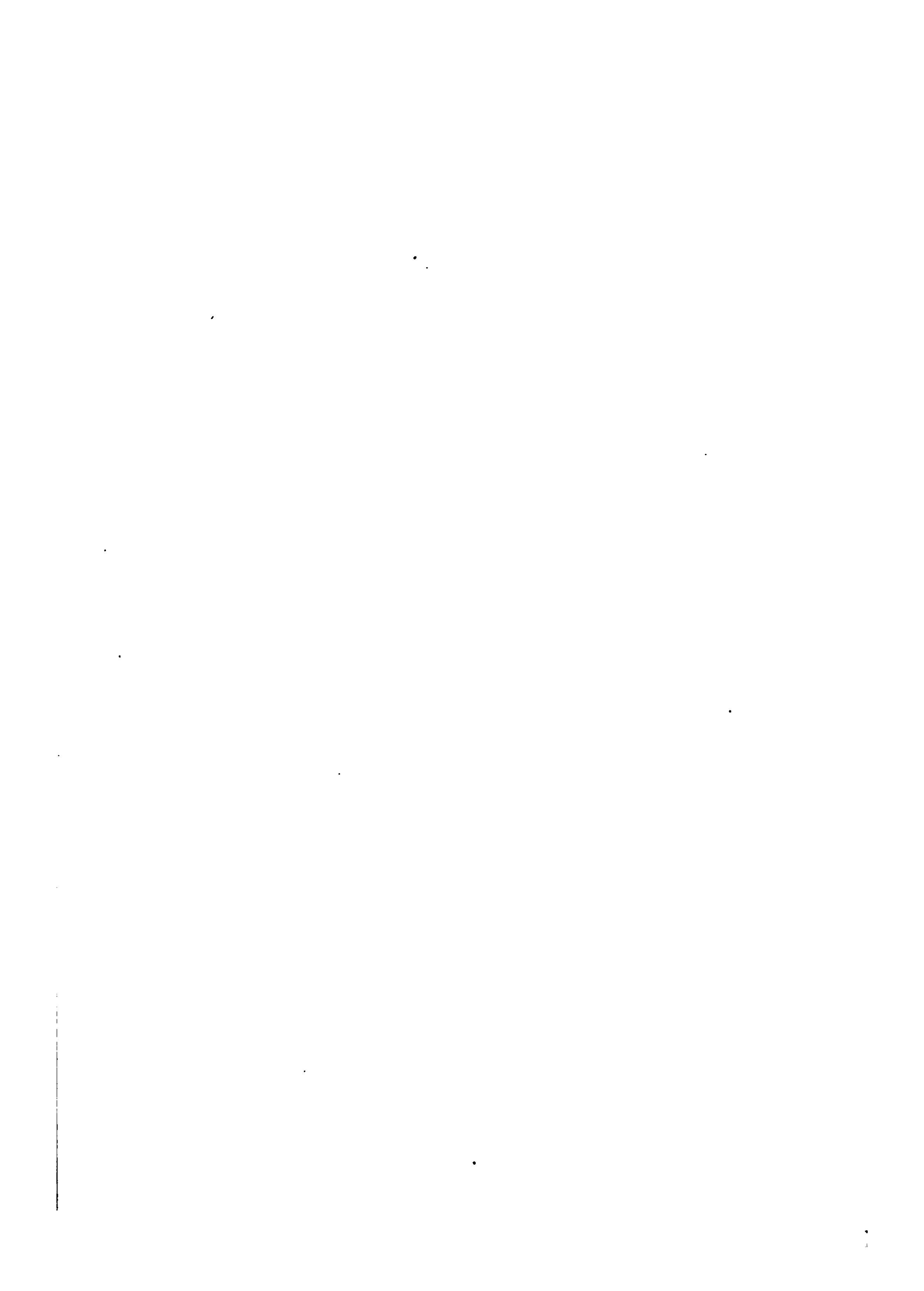
„ 430. Zeile 12 von oben statt $2\sqrt{\lambda^3}$ lies: $2\sqrt[3]{\lambda}$.

Ausser diesen Druckfehlern sind folgende zwei Verbesserungen sachlicher Natur zu berücksichtigen:

S. 142. Im Fall VQ des Zwei-Centren-Problems muss, wie von Herrn Prof. Lehmann-Filhés in V. J. 1903 bemerkt worden ist, geradlinige und nicht asymptotische Bewegung auftreten.

S. 314 und 315. Gestrichene und nicht gestrichene Buchstaben müssen überall vertauscht werden. Man vertausche also ξ gegen ξ', η gegen η', p gegen p', q gegen q', Λ gegen Λ', λ gegen λ' und umgekehrt.

Ich verdanke diese Bemerkung Herrn Dr. Wilkens.



DIE MECHANIK

DES

HIMMELS.

VORLESUNGEN

VON

CARL LUDWIG CHARLIER,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LUND.

ZWEITER BAND.

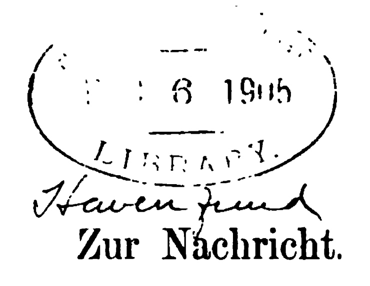
ERSTE ABTHEILUNG.

MIT ZAHLREICHEN FIGUREN.



LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1905

Die zweite Abtheilung des zweiten Bandes (Schluss des Werkes) folgt binnen Jahresfrist.



Zur Nachricht.

Die zweite Abtheilung des zweiten Bandes wird die Fortsetzung der Vorlesungen über die Convergenz der Reihen in der Mechanik des Himmels enthalten und die Frage nach der Darstellung der Integrale des Problems der drei Körper durch trigonometrische Reihen behandeln. Sodann werden die Untersuchungen über die periodischen Lösungen weiter ergänzt, im besonderen in Bezug auf die periodischen Lösungen der dritten Gattung für den Fall $e = e' = 0$, dessen Existenz auf Seite 238 in Frage gestellt wird.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

